

LEZIONI DI ASTRONOMIA FONDAMENTALE
(Prima Parte)

Mario G. Lattanzi e Renato Pannunzio
INAF – Osservatorio Astronomico di Torino

Corso di Laurea Magistrale in Astrofisica e Fisica Cosmica
Facoltà di Fisica – Università di Torino

(versione del 24/04/2007 13.58)

La Sfera Celeste

Generalità

Quando si vuole determinare la posizione di un astro in cielo in un certo istante, si ricorre alla proiezione di questo su di una ideale **Sfera Celeste** di raggio indefinito con origine nel centro della **Terra** o in qualche altro punto dello spazio (ad es. il baricentro del sistema solare).

Tuttavia per poter definire correttamente la posizione in cielo dell'astro occorre realizzare sulla **Sfera Celeste** un sistema di coordinate analogo a quello che viene utilizzato per stabilire la posizione geografica di un luogo sulla **Terra**.

Per comprendere meglio il problema aiutiamoci con la **Figura 1**.

Supponiamo di considerare una sfera di raggio indefinito con origine nel centro della **Terra** sulla quale vengono proiettati gli astri. Immaginiamo ora di tagliarla idealmente con due piani perpendicolari tra di loro passanti per il centro della sfera detti rispettivamente **Piano Fondamentale** e **Piano Origine**. Ebbene con questa operazione si individuano sulla sfera due cerchi massimi $AA'A''A'''$ e $PCAQ$ che si intersecano in due punti **A** e **A''** di cui uno (il punto **A**), per convenzione, viene considerato come origine del sistema di coordinate.

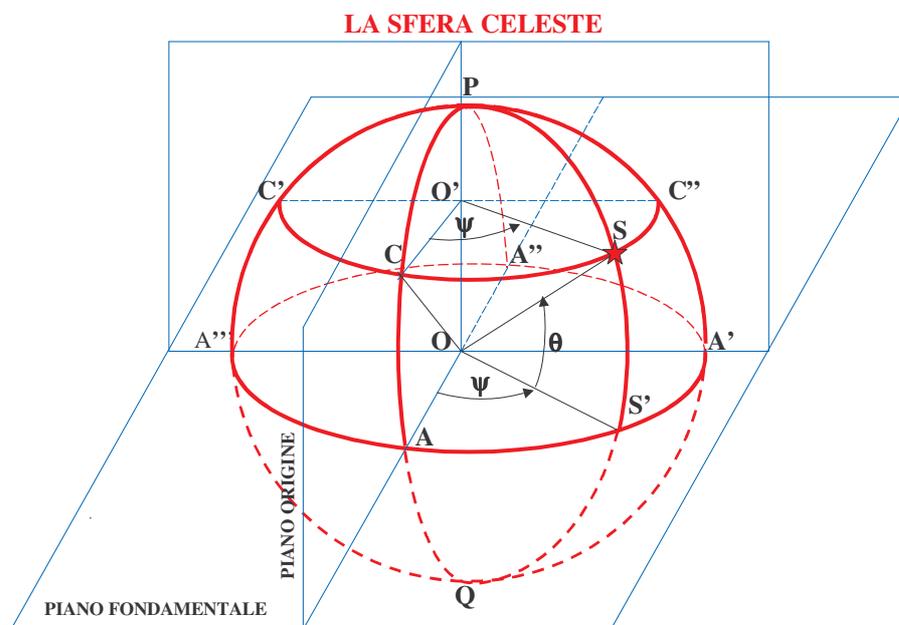


Fig. 1

Pertanto le coordinate di una **Stella S** vengono riferite a questa origine. La prima coordinata ψ viene contata positivamente sul cerchio del **Piano Fondamentale**, generalmente in gradi, a partire dal punto **A** fino al punto **S'** che rappresenta la proiezione della **Stella S** presa sul **cerchio massimo** passante per il **polo P** e perpendicolare al **Piano Fondamentale**, mentre la seconda coordinata θ viene contata positivamente dal punto **S'** del **Piano Fondamentale** sul cerchio massimo passante per

P fino ad incontrare il **cerchio minore** parallelo al **Piano Fondamentale** nel punto S della **Stella**. Si ricorda che qualsiasi piano intersecante la **Sfera Celeste** e non passante per il suo centro determina sulla sfera un **cerchio minore**.

A volte risulta conveniente calcolare la distanza angolare tra due punti aventi stessa altezza dal **Piano Fondamentale** su di un **cerchio minore** anziché su di un **cerchio massimo**. Se ad esempio volessimo calcolare la distanza angolare CS di **Figura 1** vediamo che questa è legata alle quantità ψ , θ e $R=CO=AO$ dalle seguenti relazioni:

$$CS = \psi^{\text{rad}} \cdot CO' = \psi^{\text{rad}} \cdot R \cdot \cos(\vartheta)$$

ma ψ è anche:

$$\psi^{\text{rad}} = \frac{AS'}{R}$$

Sostituendo quest'ultima relazione nella precedente si ha:

$$CS = AS' \cdot \cos(\vartheta)$$

Se considerassimo la sfera di raggio unitario ($R=1$) allora $\psi = AS'$ quindi CS si può scrivere:

$$CS = \psi \cdot \cos(\vartheta)$$

Si ricordi che la distanza angolare CS è stata calcolata su di un cerchio minore, mentre bisognerebbe, correttamente, calcolarla su di un cerchio massimo. Tuttavia, come si vedrà più avanti, in particolare nel caso dei **Moti Propri**, quando cioè lo spostamento angolare di una **Stella** su un lungo lasso di tempo è inferiore al grado è ragionevole confondere l'arco di cerchio minore con quello massimo in quanto la differenza tra i due ammonta al massimo solo a qualche millesimo di secondo d'arco.

Poiché sulla **Sfera Celeste** si misurano solo distanze angolari di oggetti rispetto ad un sistema di coordinate o rispetto a determinati punti, lo studio dei triangoli sferici e della trigonometria sferica diventa uno strumento indispensabile per effettuare le trasformazioni da un sistema di coordinate ad un altro, oppure per calcolare le distanze angolari di punti sulla **Sfera Celeste** partendo dalla conoscenza delle coordinate e/o distanze di altri punti.

Trigonometria Sferica

Quando si parla di triangoli sferici ci si riferisce a quei triangoli generati sulla sfera ottenuti dall'intersezione di 3 piani passanti per il centro della sfera stessa, come schematicamente rappresentato in **Figura 2**.

I piani DOE , DOA e AOE determinano sulla superficie della **Sfera** i lati sferici $BC=a$, $AC=b$ e $AB=c$, mentre i rispettivi angoli opposti a tali lati sono α , β e γ .

Pertanto, se consideriamo il piano tangente alla sfera in A (**Figura 2**) e il triangolo ADE generato su tale piano dal prolungamento dei raggi OA , OB e OC abbiamo gli elementi per poter creare delle relazioni tra i lati e gli angoli del triangolo sferico ABC .

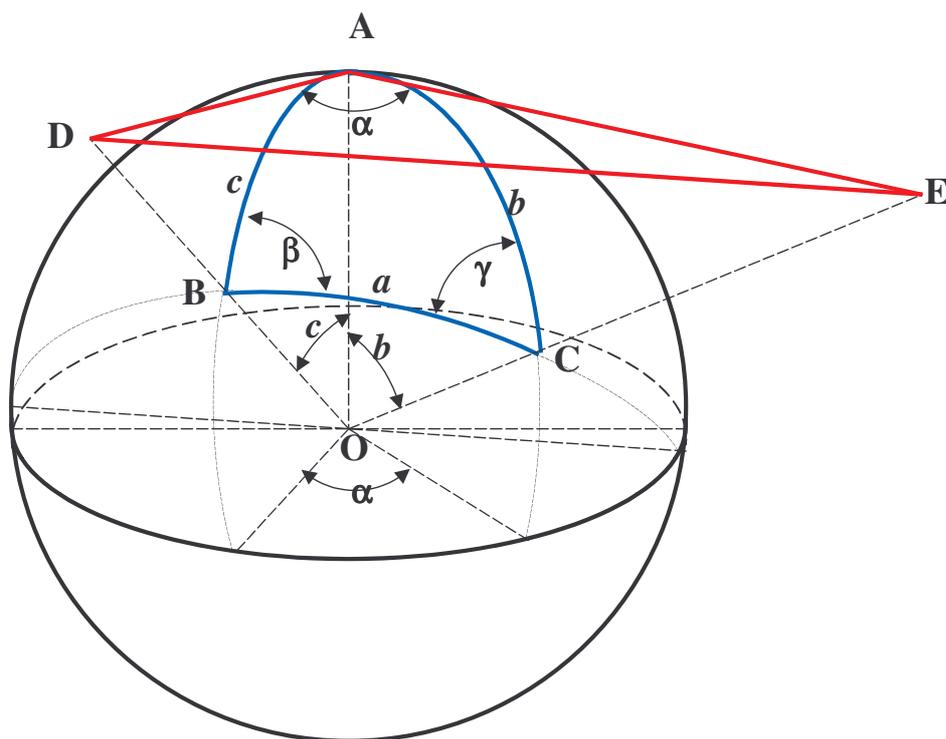


Fig. 2

Prima Formula Fondamentale di Trigonometria sferica (Formola dei Coseni)

L'analisi dei triangoli piani DOA e AOE ci mostra che, assumendo il raggio della sfera come unitario ($OA = OB = OC = 1$), valgono le seguenti relazioni:

$$AD = OA \cdot \tan(c) = \tan(c) \tag{1}$$

$$AE = OA \cdot \tan(b) = \tan(b) \tag{2}$$

$$OD = OA \cdot \sec(c) = \sec(c) \tag{3}$$

$$OE = OA \cdot \sec(b) = \sec(b) \tag{4}$$

mentre l'analisi del triangolo DAE , tramite il teorema di **Carnot**, ci fornisce quest'altra relazione:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos(\hat{DAE}) \tag{5}$$

sostituendo i valori dati dalle (1) e (2) e sapendo che $\hat{DAE} = \alpha$ si ha:

$$DE^2 = \tan^2(c) + \tan^2(b) - 2 \cdot \tan(c) \cdot \tan(b) \cdot \cos(\alpha) \tag{6}$$

Invece dal triangolo piano DOE , utilizzando sempre **Carnot**, si ha:

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2 \cdot OD \cdot OE \cdot \cos(\widehat{DOE}) \quad (7)$$

sostituendo i valori dati dalle (3) e (4) e sapendo che $\widehat{DOE} = \widehat{BOC} = a$ si ha:

$$DE^2 = \sec^2(c) + \sec^2(b) - 2 \cdot \sec(c) \cdot \sec(b) \cdot \cos(a) \quad (8)$$

sapendo dalla trigonometria che:

$$\sec^2(c) = 1 + \tan^2(c) \quad (9)$$

$$\sec^2(b) = 1 + \tan^2(b) \quad (10)$$

eguagliando le relazioni (6) e (8):

$$\begin{aligned} DE^2 &= \sec^2(c) + \sec^2(b) - 2 \cdot \sec(c) \cdot \sec(b) \cdot \cos(a) = \\ &= \tan^2(c) + \tan^2(b) - 2 \cdot \tan(c) \cdot \tan(b) \cdot \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (11)$$

e sostituendo la (9) e la (10) nella (11) si ha dopo alcune semplificazioni:

$$\boxed{\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\alpha)} \quad (12)$$

Questa è la **Prima Formula Fondamentale di Trigonometria Sferica** detta anche **Formula dei Coseni**.

Con questa formula è possibile calcolare un lato di un triangolo sferico conoscendone gli altri due e l'angolo compreso tra questi. Ruotando le lettere della relazione (12) è possibile generare le formule analoghe per i restanti due lati del triangolo sferico:

$$\cos(b) = \cos(c) \cdot \cos(a) + \sin(c) \cdot \sin(a) \cdot \cos(\beta) \quad (13)$$

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\gamma) \quad (14)$$

Dal set di formule (12), (13) e (14) è possibile ricavare gli angoli α , β e γ se sono noti i tre lati a , b e c .

$$\cos(\alpha) = \frac{\cos(a) - \cos(b) \cdot \cos(c)}{\sin(b) \cdot \sin(c)} \quad (15)$$

$$\cos(\beta) = \frac{\cos(b) - \cos(c) \cdot \cos(a)}{\sin(c) \cdot \sin(a)} \quad (16)$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\cos(c) - \cos(a) \cdot \cos(b)}{\sin(a) \cdot \sin(b)} \quad (17)$$

Seconda Formula Fondamentale di Trigonometria Sferica (Formula dei Seni)

Un altro set di formule può essere ricavato partendo dalla **Formula dei Coseni (12)** vista prima ma messa nella forma:

$$\sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\alpha) = \cos(a) - \cos(b) \cdot \cos(c) \quad (18)$$

elevando al quadrato ambo i membri si ha:

$$\sin^2(b) \cdot \sin^2(c) \cdot \cos^2(\alpha) = \cos^2(a) - 2 \cdot \cos(a) \cdot \cos(b) \cdot \cos(c) + \cos^2(b) \cdot \cos^2(c) \quad (19)$$

il membro a sinistra della (19) si può scrivere anche:

$$\sin^2(b) \cdot \sin^2(c) \cdot (1 - \sin^2(\alpha)) = \sin^2(b) \cdot \sin^2(c) - \sin^2(b) \cdot \sin^2(c) \cdot \sin^2(\alpha) \quad (20)$$

oppure, messo in altra forma:

$$1 - \cos^2(b) - \cos^2(c) + \cos^2(b) \cdot \cos^2(c) - \sin^2(b) \cdot \sin^2(c) \cdot \sin^2(\alpha) \quad (21)$$

Quindi sostituendo nel primo membro della (19) il contenuto della relazione (21) si ha:

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2(b) - \cos^2(c) + \cos^2(b) \cdot \cos^2(c) - \sin^2(b) \cdot \sin^2(c) \cdot \sin^2(\alpha) &= \\ = \cos^2(a) - 2 \cdot \cos(a) \cdot \cos(b) \cdot \cos(c) + \cos^2(b) \cdot \cos^2(c) & \end{aligned} \quad (22)$$

portando una parte del primo membro della (22) a secondo membro e semplificando si ha :

$$\sin^2(b) \cdot \sin^2(c) \cdot \sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(a) - \cos^2(b) - \cos^2(c) + 2 \cdot \cos(a) \cdot \cos(b) \cdot \cos(c) \quad (23)$$

Se poniamo ora:

$$X^2 \cdot \sin^2(a) = \sin^2(\alpha) \quad (24)$$

dove X^2 è una costante moltiplicativa positiva e inseriamo la (24) nella (23) quest'ultima diventa, spostando i membri da destra a sinistra e viceversa:

$$\begin{aligned} \cos^2(a) + \cos^2(b) + \cos^2(c) - 2 \cdot \cos(a) \cdot \cos(b) \cdot \cos(c) &= \\ = 1 - X^2 \cdot \sin^2(a) \cdot \sin^2(b) \cdot \sin^2(c) & \end{aligned} \quad (25)$$

Utilizzando le altre 2 **Formule dei Coseni** (13) e (14) si ha semplicemente una rotazione delle lettere sia nel primo che nel secondo membro della (25) per cui le cose non cambiano e non cambia neppure il valore della costante X^2 , per cui la (24) può essere scritta nella seguente maniera:

$$X^2 = \frac{\sin^2(\alpha)}{\sin^2(a)} = \frac{\sin^2(\beta)}{\sin^2(b)} = \frac{\sin^2(\gamma)}{\sin^2(c)} \quad (26)$$

Estraendo la radice quadrata di ogni membro si arriva alla **Seconda Formula Fondamentale della Trigonometria Sferica** detta anche **Formula dei Seni**:

$$\boxed{X = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(a)} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(b)} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(c)}} \quad (27)$$

Questa formula può essere usata quando si hanno due lati di un triangolo sferico ed un angolo non compreso tra i lati (es. dati a, b, α si ricava β oppure dati b, c, γ si ricava β) o quando si hanno due angoli e un lato non compreso tra i due angoli (es. dati α, β, a si ricava b oppure dati β, γ, b si ricava c).

Terza Formula Fondamentale di Trigonometria sferica

E' possibile ricavare un'altra interessante formula rimpiazzando la prima **Formula dei Coseni** (12) nella seconda **Formula dei Coseni** (13):

$$\cos(b) = \cos(c) \cdot [\cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\alpha)] + \sin(c) \cdot \sin(a) \cdot \cos(\beta) \quad (28)$$

sostituendo $\cos^2(c)$ con $1 - \sin^2(c)$ e dividendo ambo i membri per $\sin(c)$ dopo alcune semplificazioni si ha:

$$\boxed{\sin(a) \cdot \cos(\beta) = \cos(b) \cdot \sin(c) - \sin(b) \cdot \cos(c) \cdot \cos(\alpha)} \quad (29)$$

La (29) rappresenta la **Terza Formula Fondamentale della Trigonometria Sferica**.

Ruotando le lettere della (29) si ha tutto il set di formule simili che permettono il calcolo di un angolo dati i 3 lati e un angolo oppure il calcolo di un lato dati gli altri 2 lati e 2 due angoli secondo le seguenti relazioni:

$$\sin(a) \cdot \cos(\gamma) = \cos(c) \cdot \sin(b) - \sin(c) \cdot \cos(b) \cdot \cos(\alpha) \quad (30)$$

$$\sin(b) \cdot \cos(\alpha) = \cos(a) \cdot \sin(c) - \sin(a) \cdot \cos(c) \cos(\beta) \quad (31)$$

$$\sin(b) \cdot \cos(\gamma) = \cos(c) \cdot \sin(a) - \sin(c) \cdot \cos(a) \cdot \cos(\beta) \quad (32)$$

$$\sin(c) \cdot \cos(\alpha) = \cos(a) \cdot \sin(b) - \sin(a) \cos(b) \cos(\gamma) \quad (33)$$

$$\sin(c) \cdot \cos(\beta) = \cos(b) \cdot \sin(a) - \sin(b) \cos(a) \cos(\gamma) \quad (34)$$

Esiste inoltre un ultimo set di formule di trigonometria sferica che generalmente viene poco usato, in quanto, di un triangolo sferico, difficilmente si conoscono solo i tre angoli α , β e γ . Per questa ragione si forniscono direttamente le formule che calcolano i lati del triangolo sferico una volta noti i 3 angoli, senza fornirne la dimostrazione.

$$\cos(a) = \frac{\cos(\alpha) + \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma)}{\sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)} \quad (35)$$

$$\cos(b) = \frac{\cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma)}{\sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma)} \quad (36)$$

$$\cos(c) = \frac{\cos(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)} \quad (37)$$

In determinati problemi di trigonometria sferica capita alle volte di dover risolvere dei triangoli sferici rettangoli in cui ovviamente un angolo è di 90° (vedi **Figura 3**). In questo caso le formule viste sinora si modificano nel seguente modo se supponiamo, come in **Figura 3**, che l'angolo in **A** sia retto ($\alpha=90^\circ$).

La prima **Formula dei Coseni** diventa:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) \quad (38)$$

Questa formula permette di trovare l'ipotenusa sferica dati gli altri due lati.

Manipolando la **Seconda Formula Fondamentale** invece si ottiene:

$$\sin(a) = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} \quad (39)$$

Questa formula permette di trovare l'ipotenusa sferica dato un lato e un angolo opposto a tale lato

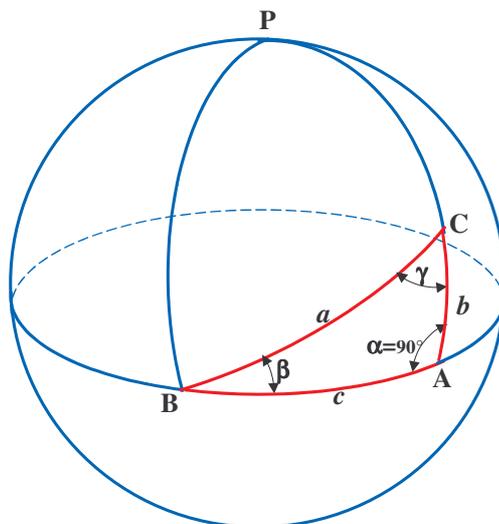


Fig. 3

Se invece si considera la (30) e la (12) opportunamente semplificate per via di $\alpha=90^\circ$ le formule diventano:

$$\sin(a) \cdot \cos(\gamma) = \cos(c) \cdot \sin(b) \quad (40)$$

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) \quad (41)$$

dividendo ora la (40) per la (41) membro a membro si ha:

$$\tan(b) = \tan(a) \cdot \cos(\gamma) \quad (42)$$

prendendo invece la (29) e la (12) e dividendole membro a membro si ha:

$$\tan(c) = \tan(a) \cdot \cos(\beta) \quad (43)$$

Queste ultime due formule permettono di trovare un lato data l'ipotenusa e un angolo adiacente al lato incognito.

ATTENZIONE: β non è mai uguale a $(90^\circ - \gamma)$ in quanto la somma degli angoli interni di un triangolo sferico è sempre maggiore di 180° (vedi più avanti la dimostrazione)

Area di un Triangolo Sferico

Come per i triangoli piani anche per quelli sferici c'è la possibilità di calcolare l'area. Una differenza fondamentale è che l'area dei triangoli sferici è espressa in misure angolari, cioè di angoli solidi con vertici nel centro della sfera espressi in radianti al quadrato (steradiani) o in gradi quadrati, mentre quella dei triangoli piani può essere espressa in qualsiasi unità di superficie (cm^2 , m^2 ecc.). Un'altra differenza sostanziale è che l'angolo solido sotteso da un triangolo sferico delimitato da 3 piani passanti per il centro della sfera determina sulla sua superficie la stessa area angolare indipendentemente dalle dimensioni della sfera. Infatti, come è possibile vedere dalla **Figura 4** l'angolo solido con vertice in O che sottende il triangolo sferico ABC avrà sempre la stessa ampiezza anche variando le dimensioni del raggio della sfera, mentre ovviamente la superficie del triangolo sferico, paragonabile, ad esempio, ad una porzione triangolare della superficie terrestre, tenderebbe ad aumentare con l'aumentare del raggio della sfera (in questo caso con il raggio terrestre).

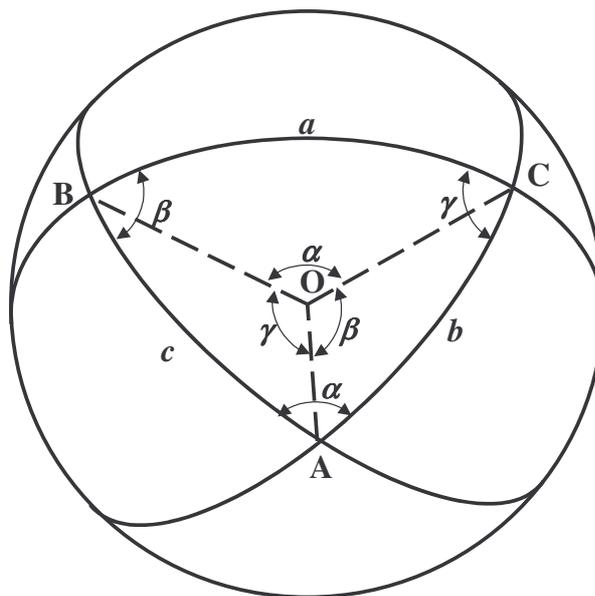


Fig. 4

Tuttavia in campo astronomico non avendo il vincolo del raggio della sfera, le aree dei triangoli sferici sono misurati solo con misure angolari in steradiani.

Ricordiamo che lo steradiante é quell'angolo solido con il vertice nel centro di una sfera che sottende una calotta sferica, la cui area è “ **all'incirca uguale**” a quella di un quadrato (sulla sfera) con i lati uguali al raggio della sfera (vedremo nell'**Appendice A** il perché non è proprio uguale). In altri termini, per analogia, se nel caso bidimensionale il radiante è il rapporto tra la circonferenza di un cerchio e il suo raggio, nel caso tridimensionale lo steradiante è il rapporto tra la superficie della sfera e il quadrato del suo raggio secondo la relazione:

$$A = \frac{S}{R^2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^2}{R^2} = 4 \cdot \pi \dots (\text{Steradiani}) \quad (44)$$

dove **S** è la superficie di una sfera di raggio **R** ed **A** rappresenta l'area angolare in **steradiani** della stessa sfera.

Poiché nella pratica corrente delle misure angolari è più intuitivo ragionare in termini di gradi piuttosto che di radianti o steradiani vediamo ora a quanti gradi quadrati corrisponde la superficie di una sfera. Ricordiamo che per un cerchio il numero di radianti **L** è dato dalla seguente relazione:

$$L = \frac{Crf}{R} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{R} = 2 \cdot \pi \dots (\text{Radianti}) \quad (45)$$

dove **Crf** è la circonferenza di un cerchio di raggio **R**. Pertanto il valore di un radiante espresso in gradi sarà:

$$1Rad = \frac{360^\circ}{2 \cdot \pi} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ,29577951 \dots (\text{Gradi}) \quad (46)$$

Quindi un radiante al quadrato sarà:

$$1Rad^2 = 1Steradiante = \left(\frac{360^\circ}{2 \cdot \pi} \right)^2 = \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right)^2 = 3.828,80635 \dots (\text{Gradi}^2) \quad (47)$$

ATTENZIONE a non confonderlo con un quadrato sulla sfera di lato **1 radiante**.

Sapendo che in una sfera ci sono **4π Steradiani** il calcolo dei gradi quadrati di una sfera è immediato:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right)^2 = 41.252,96123 \dots (\text{Gradi}^2) \quad (48)$$

A questo punto abbiamo gli elementi per calcolarci l'area angolare di un triangolo sferico qualunque. A questo proposito analizziamo la **Figura 5**. Se consideriamo i cerchi massimi **S₁** e **S₃** pertinenti a due lati del triangolo sferico **ABC**, questi delimiteranno, secondo l'angolo **α** del triangolo sferico,

due zone della sfera diametralmente opposte dette **Fusi Sferici**, inglobanti il triangolo sferico ABC ed il suo simmetrico diametralmente opposto ($A'B'C'$).

Se invece si prendono in considerazione i cerchi massimi S_2 e S_3 separati angularmente dell'angolo β anche i due **Fusi Sferici** che si verranno a creare conterranno i triangoli sferici ABC e $A'B'C'$. Analogo discorso con i cerchi massimi S_1 e S_2 separati angularmente dell'angolo γ che conterranno i medesimi triangoli sferici. Ci si può facilmente rendere conto che le 3 coppie di **Fusi Sferici** coprono tutta la **Sfera Celeste** più una sovrapposizione molteplice dovuta ai triangoli sferici ABC e $A'B'C'$. In realtà le 3 coppie di **Fusi** generano 3 coppie di triangoli sferici per cui affinché si abbia solo la copertura della sfera occorre eliminare due coppie di triangoli eccedenti.

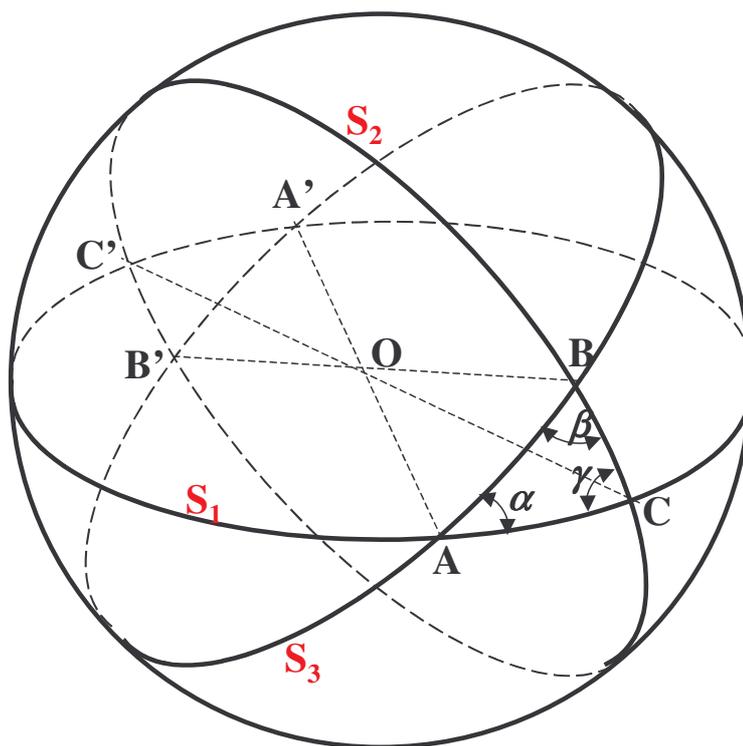


Fig. 5

Pertanto se con S indichiamo la superficie della sfera **Celeste**, la superficie A di un **Fuso Sferico** sarà proporzionale all'angolo θ° esistente tra i due cerchi massimi che lo generano secondo la relazione:

$$A = S \cdot \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \quad (49)$$

Poiché di **Fusi Sferici**, per quanto detto prima, se ne generano **6 (3 coppie)** ed in questi c'è un'eccedenza di 2 triangoli sferici ABC e di altri 2 triangoli sferici $A'B'C'$, affinché sia garantita la copertura della sfera **Celeste** deve valere la seguente relazione utilizzando la (49):

$$S = \frac{2 \cdot S \cdot \alpha^\circ}{360^\circ} + \frac{2 \cdot S \cdot \beta^\circ}{360^\circ} + \frac{2 \cdot S \cdot \gamma^\circ}{360^\circ} - 4 \cdot A = \frac{S}{180^\circ} \cdot (\alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ) - 4 \cdot A \quad (50)$$

mettendo in evidenza A e sapendo che $S = 4\pi$ Steradiani si ha:

$$4A = \frac{4 \cdot \pi}{180^\circ} \cdot (\alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ) - 4 \cdot \pi \quad (51)$$

semplificando si ha

$$A = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot (\alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ) - \pi \dots \dots \dots (\text{Steradiani}) \quad (52)$$

sapendo che **1 Steradiante** corrisponde a $\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)^2$ **Gradi quadrati** l'area del triangolo sferico ABC

sarà data dalla seguente relazione:

$$A = \left[\frac{\pi}{180^\circ} \cdot (\alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ) - \pi \right] \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right)^2 = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot (\alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ - 180^\circ) \dots \dots \dots (\text{Gradi}^2) \quad (53)$$

La formula analoga in cui le misure degli angoli α , β e γ sono espresse in radianti è invece la seguente:

$$A = \alpha^r + \beta^r + \gamma^r - \pi \cdot \dots \dots \dots (\text{Steradiani}) \quad (54)$$

Da questa formula si deducono importanti proprietà sulle aree dei triangoli sferici.

Una prima considerazione è che la somma degli angoli interni di un triangolo sferico non è costante ma varia con la superficie del triangolo stesso. E' noto infatti che in un triangolo piano la somma degli angoli interni è costantemente 180° (o π radianti) indipendentemente dalla forma o superficie del triangolo. Nel caso sferico invece la somma degli angoli interni va da un minimo di **180°** (triangolo con superficie infinitesima e praticamente piano) fino ad un valore massimo corrispondente a **3 angoli piatti di 180°** . Infatti nel caso di un quadrante sferico, del tipo **APA'** di **Figura 1**, gli angoli nei 3 vertici sono uguali a **90°** e quindi la loro somma ammonta a **270°** . L'esubero angolare rispetto ai 180° dei triangoli piani viene chiamato **Eccesso Sferico**.

Un'altra proprietà dei triangoli sferici è che se due triangoli hanno angoli uguali, questi sono necessariamente uguali tra di loro, cosa non vera per i triangoli piani che sotto queste condizioni risultano solo simili tra di loro (angoli e forma uguali ma aree diverse).

Un'ultima considerazione sulle aree di superfici sferiche. Quando si dice che una lastra fotografica occupa un'area di cielo quadrata di **$1^\circ \times 1^\circ$** la sua superficie angolare non corrisponderà esattamente a **1 grado quadrato**, in quanto per effetto dell'**Eccesso Sferico** visto prima sarà leggermente più grande di **0,0000508 gradi quadrati** (vedi **Appendice A** per una trattazione rigorosa).

Sistemi di Coordinate Celesti

Il Sistema Altazimutale o Primo Sistema

Sicuramente il primo e più semplice modo per definire la posizione di un astro in cielo è quello di riferirlo ad un sistema di coordinate in cui il **Piano Fondamentale** coincide con l'**Orizzonte Astronomico**, mentre il **Piano Origine**, perpendicolare a questo, coincide con il **Meridiano**.

Più precisamente il **Piano dell'Orizzonte Astronomico** è quel piano tangente alla superficie della **Terra** nel punto in cui si trova l'osservatore (perpendicolare alla linea del filo a piombo), che prolungato nello spazio interseca la sfera **Celeste** generando un cerchio detto **Linea dell'Orizzonte Astronomico**. Questa linea solitamente non coincide con l'**Orizzonte Sensibile**, cioè quella linea che separa il cielo dalla **Terra** o il cielo dall'acqua. E' noto infatti che l'**Orizzonte Sensibile** di una persona che guarda il mare dalla spiaggia sarà decisamente più vicino di quello di una persona che osserva l'orizzonte marino stando su di una collina .

Per quantificare la distanza della linea dell'**Orizzonte Sensibile** rispetto ad un osservatore posto ad una certa quota sulla superficie della **Terra** possiamo riferirci alla **Figura 6**.

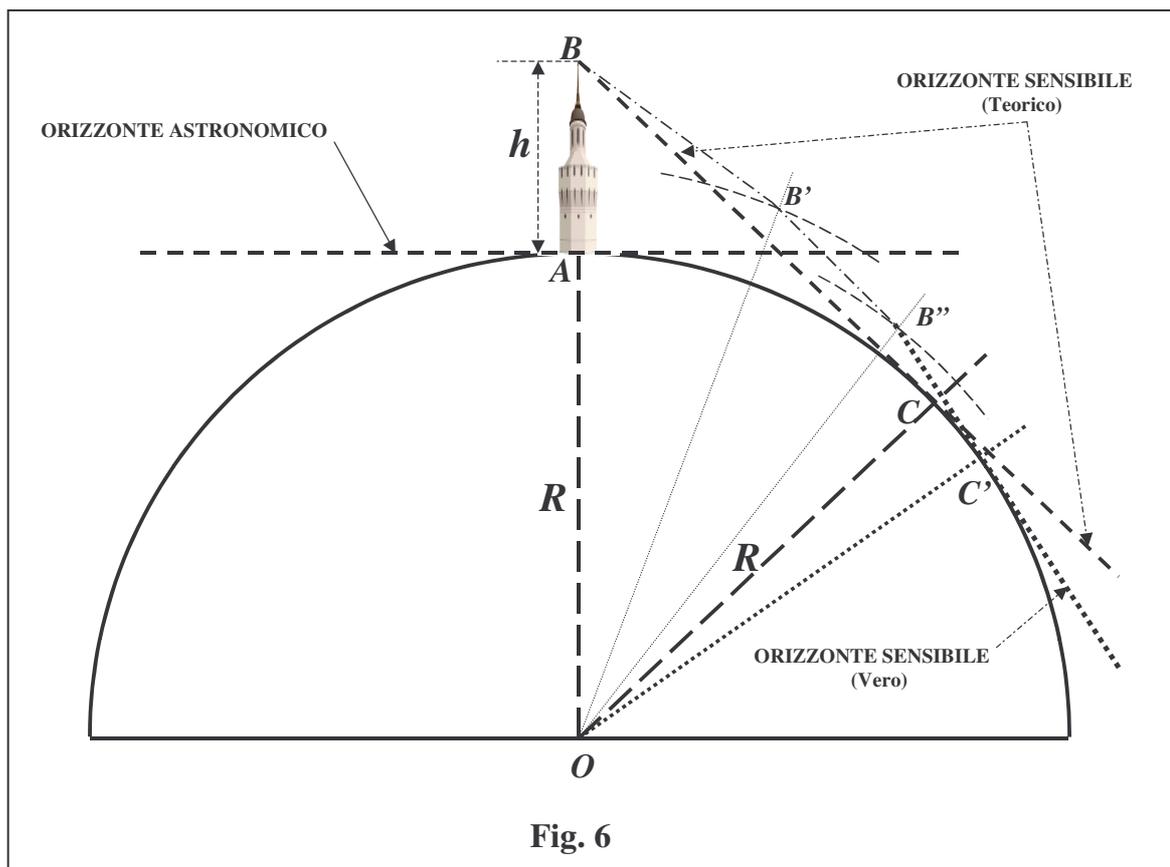
Supponiamo che una persona osservi l'orizzonte marino dall'alto di una torre di altezza $AB=h$ rispetto al livello del mare. L'orizzonte che osserverà da quell'altezza sarà rappresentato dalla linea **BC** della **Figura 6** che sfiora la superficie del mare nel punto di tangenza **C** e che ne identifica un punto della **Linea dell'Orizzonte Sensibile** essendo questa equidistante dal punto **B** della quantità **BC**. Ovviamente, per questioni pratiche e di scala, in **Figura 6** si è rappresentata la **Terra** con un semicerchio di raggio **R**, mentre la torre **BC** è stata disegnata volutamente grande rispetto alle dimensioni della **Terra**. Poiché in genere le altezze $AB=h$ sono irrisorie rispetto alle dimensioni della **Terra**, ne segue che la distanza **BC** risulta praticamente uguale all'arco di cerchio **AC**.

Quindi il calcolo della distanza **BC** si può ottenere da semplici considerazioni di geometria euclidea. Infatti per il triangolo rettangolo **OBC** vale la seguente relazione:

$$BC \cong AC = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{R^2 + 2Rh + h^2 - R^2} \quad (55)$$

considerando che **h** è piccolo rispetto a **R**, a maggior ragione lo sarà il suo quadrato (h^2) per cui questo termine lo si può eliminare dalla relazione (55) che diventa semplicemente:

$$BC \cong AC = \sqrt{2Rh} \quad (56)$$



Nella **Tabella 1** sono riportati alcuni esempi di distanza della **Linea dell' Orizzonte Sensibile** a seconda della quota a cui si trova l'osservatore. I dati riportati nella **Tabella 1**, ottenuti con la relazione (55), sono puramente indicativi in quanto non sempre si ha la possibilità di avere come **orizzonte sensibile** l'orizzonte marino. Inoltre a causa della presenza dell'atmosfera terrestre l'**Orizzonte Sensibile Vero** risulta leggermente più distante di quello **Teorico** (visibile senza atmosfera) in quanto il percorso visivo **BC** viene curvato, per effetto della rifrazione atmosferica, secondo la linea **BB'B''C'** di **Figura 6**. Infatti l'atmosfera terrestre può essere considerata come un insieme di gusci sferici concentrici di aria che circondano la **Terra** con densità decrescenti dalla superficie verso lo spazio esterno. Questi gusci di diversa densità tendono a deviare i raggi visivi, per il fenomeno della rifrazione, verso il basso (vedi più avanti). Il risultato di queste rifrazioni successive, dipendenti dalla lunghezza d'onda, tra gusci contigui porta ad avere come risultato finale un tragitto curvo **BB'B''C'** leggermente più lungo di quello rettilineo **BC** come è possibile vedere dalla **Figura 6**.

Purtroppo la distanza della **Linea dell'Orizzonte Sensibile Vero**, corrispondente alla lunghezza **BC'**, è difficilmente quantificabile, ma sicuramente è molto vicina alla distanza **BC** poiché per le convenzionali altezze dei punti di osservazione sulla **Terra** le variazioni di densità dei gusci di atmosfera vicini alla superficie sono piccole e di conseguenza anche le rifrazioni che si verificano sono piccole per cui la lunghezza del percorso curvo **BC'** risulta praticamente coincidente con il percorso rettilineo **BC**.

Tabella 1		
Punto di osservazione	Altezza s.l.m. in metri	Distanza Linea Orizzonte Sensibile Teorico in km
Persona in piedi	1,70 m	4,6 km
10° piano di un palazzo	30 m	19,5 km
Punta Mole Antonelliana	167 m	46 km
Osservatorio Astronomico di Torino	622 m	89 km
Cervinia (montagna)	2.000 m	160 km
Aereo in volo intercontinentale	12.000 m	390 km

Ora che abbiamo definito l'**Orizzonte Astronomico**, usato come **Piano Fondamentale** di riferimento del **Primo Sistema di Coordinate (o Altazimutale)**, vediamo di comprendere il significato di **Meridiano**.

Per **Meridiano** si intende quel piano perpendicolare all'**Orizzonte** passante per l'osservatore, per un punto sopra la verticale dell'osservatore, detto **Zenit (Z)** e orientato secondo la direzione **Nord-Sud** (vedi **Figura 7**). Questo piano, proiettato sulla **Sfera Celeste**, determina un cerchio massimo **SZNZ'**, ed ha la caratteristica di contenere l'asse polare **Celeste P**, sul cui prolungamento si trova all'incirca l'attuale **Stella Polare**, che proiettata sul piano dell'orizzonte individua la direzione **Nord**. Diametralmente opposto a questo punto sull'orizzonte abbiamo la direzione **Sud**, mentre a **90°** a sinistra e a destra rispetto a questa direzione abbiamo gli altri due punti cardinali detti rispettivamente **Est** e **Ovest**. La caratteristica saliente del **Piano Meridiano** è quella secondo cui tutti gli astri, nel loro moto apparente in cielo quando attraversano questo piano raggiungono la massima altezza sull'orizzonte, chiamata usualmente **Culminazione Massima o Superiore**.

Per **Primo Verticale** si intende quel piano perpendicolare sia all'**Orizzonte** che al **Meridiano** e che passa per i punti cardinali **Est** e **Ovest** e per lo **Zenit**.

L'**Almucantarato** invece è il **cerchio minore** parallelo al **cerchio massimo dell'Orizzonte** che contiene la **Stella (X)** osservata, o in altri termini è il cerchio minore avente la stessa altezza angolare della **Stella** dall'orizzonte in ogni suo punto.

Per **Cerchio Verticale** infine si intende quel cerchio massimo perpendicolare all'**Orizzonte** e passante per la **Stella (X)** e per lo **Zenit**.

Ora abbiamo tutti gli elementi per poter definire le coordinate del **Sistema Altazimutale**.

La prima coordinata detta **Azimut (A)** (dall'arabo **As-Samt = direzione**) è l'arco di **Orizzonte** compreso fra il punto cardinale **Nord** e la proiezione dell'astro **X** secondo il **cerchio verticale** sull'**orizzonte** stesso nel punto **X'**. Tale angolo viene contato positivamente da **Nord** verso **Est**, nel senso che l'**Azimut** del punto geografico **Est** vale **90°** mentre quello **Sud 180°** e **Ovest 270°**.

L'**Azimut** misurato in questo modo viene usualmente detto **Geodetico**.

In Astronomia è invece molto diffusa la misura degli **Azimut** a partire dal punto **Sud**, positivamente verso **Ovest** e negativamente verso **Est**. Tuttavia la differenza tra i due sistemi di misura è più formale che sostanziale in quanto entrambi definiscono correttamente e univocamente la coordinata orizzontale dell'astro.

La seconda coordinata, detta **Altezza (h)**, viene misurata positivamente in gradi dal punto **X'** dell'**Orizzonte** e del **Cerchio Verticale** fino ad incontrare l'**Astro X** sul cerchio dell'**Almucantarato** (**Figura 7**). Esiste anche un altro modo per misurare questa seconda coordinata e cioè misurarla in gradi dallo **Zenit (Z)** sul **Cerchio Verticale** fino ad incontrare l'**Astro** in **X**.

In questo caso la coordinata viene chiamata **Distanza zenitale (z)** ed è complementare ad **h** secondo la seguente relazione:

$$z = 90^\circ - h \quad (57)$$

Causa la rotazione terrestre giornaliera attorno al proprio asse le coordinate **altoazimutali** degli **astri** cambiano in continuazione istante dopo istante in quanto descrivono apparentemente sulla volta **Celeste** degli archi di cerchio non paralleli all'orizzonte (salvo che al **Polo Nord** o **Sud**).

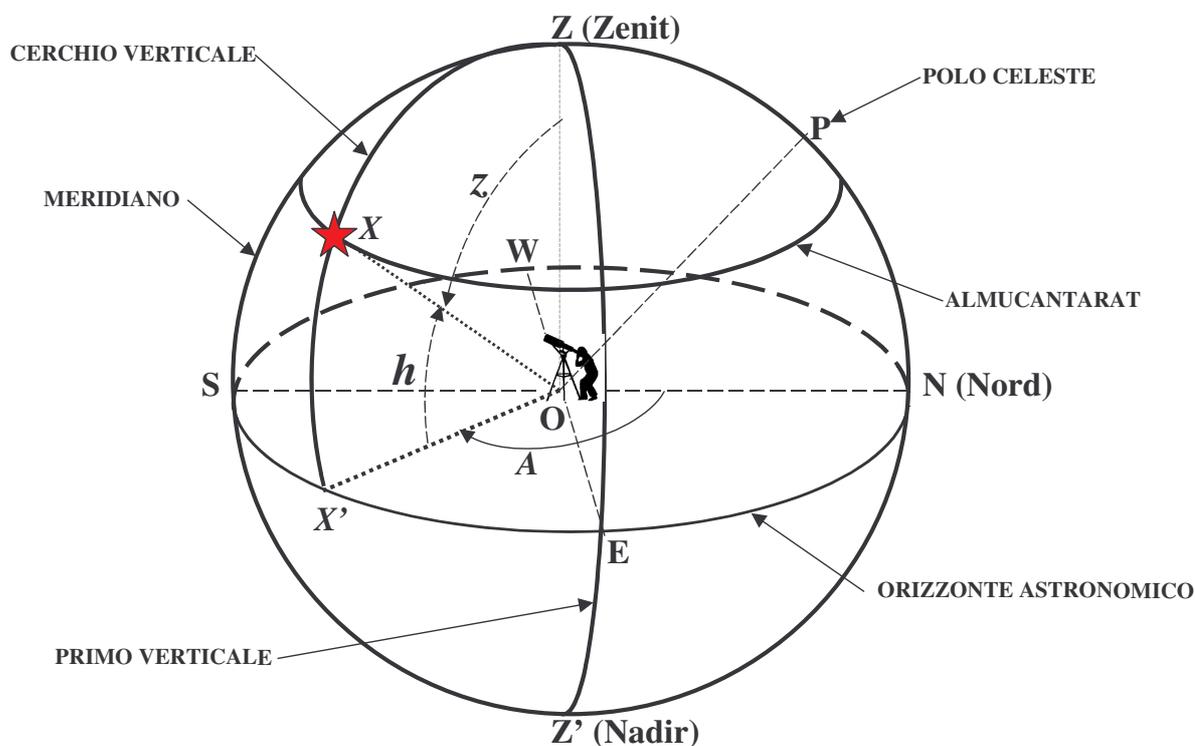


Fig. 7

Pertanto a questo sistema di coordinate, immediato ma poco sfruttabile nella pratica astronomica, è stato affiancato un altro sistema di coordinate che utilizza al posto dell'Orizzonte l'Equatore Celeste

Il Sistema Orario o Secondo Sistema

Il Secondo Sistema assume come **Piano Fondamentale** di riferimento l'**Equatore Celeste**, cioè quel cerchio massimo ottenuto dall'intersezione del piano equatoriale terrestre, prolungato nello spazio, con la **Sfera Celeste**. Occorre ricordare che per effetto della rotazione assiale terrestre tutti gli astri si muovono apparentemente da **Est** verso **Ovest** descrivendo degli archi di cerchio paralleli all'**Equatore Celeste** che diventano via via più piccoli man mano che si allontanano da questo cerchio fondamentale, come è possibile vedere dalla **Figura 8**.

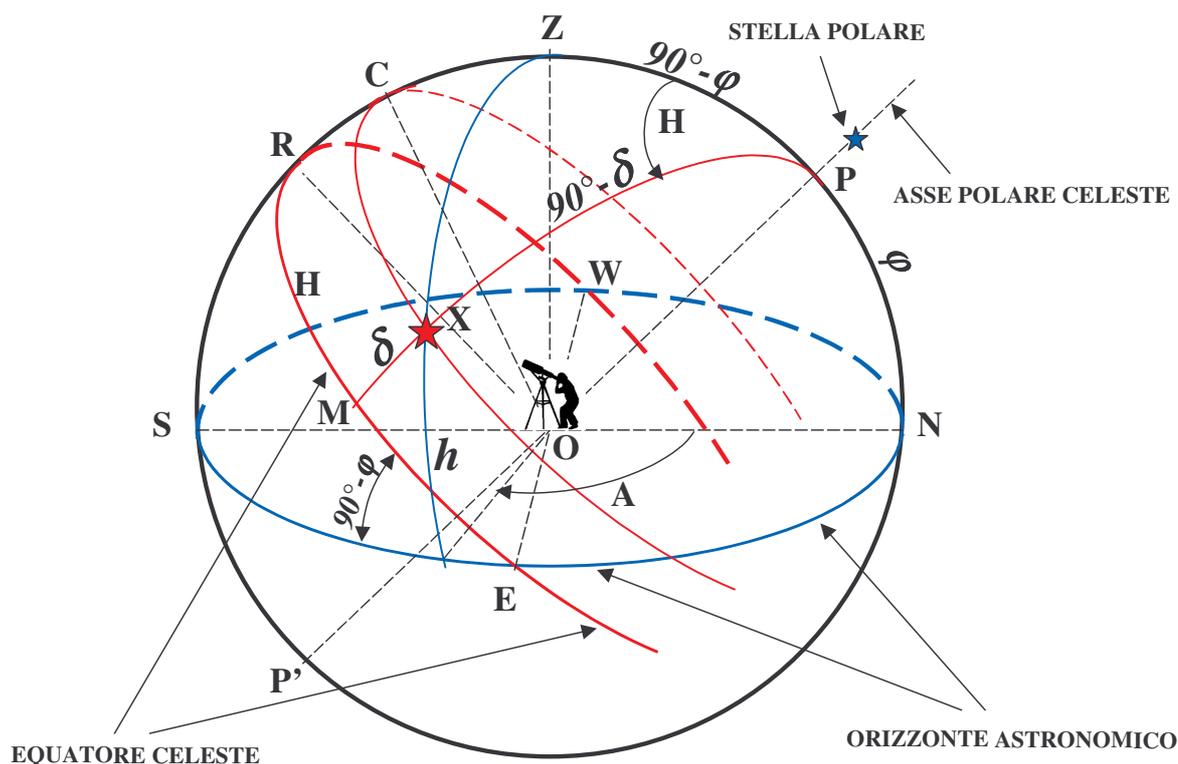


Fig. 8

Perpendicolare all'Equatore Celeste abbiamo l'Asse Polare OP sul prolungamento del quale si trova a circa **43 minuti d'arco** di distanza angolare l'attuale **Stella Polare** (α Ursae Minoris) .
Tutti i cerchi massimi che passano per il **polo** P e il suo diametralmente opposto P' vengono chiamati **Cerchi Orari** compreso quello che passa per lo **Zenit**, Z , del luogo che coincide con il **Meridiano**.
A questo punto possiamo definire le due coordinate di questo **Secondo Sistema**. La prima chiamata **Angolo Orario**, H , viene contata **sull'Equatore Celeste** in ore, minuti e secondi di **Tempo Siderale** (vedi più avanti) a partire dal **Meridiano** PZS positivamente verso **Ovest** e negativamente verso **Est** fino ad incontrare il cerchio orario passante per l'astro X . La seconda coordinata contata in gradi, positivamente nell'emisfero **Nord** e negativamente nell'emisfero **Sud**, sul cerchio orario PM dal punto M fino al punto X passante per l'astro, viene chiamata **Declinazione**, δ . Ovviamente, se confrontiamo in **Figura 8** questo sistema di coordinate con il **Primo Sistema Altoazimutale** osserviamo che l'**Equatore Celeste** rispetto al piano dell'**Orizzonte** è inclinato di un angolo pari alla **Colatitudine**, cioè al complemento a 90° della latitudine ϕ del luogo di osservazione. In altri termini se la località in questione è l'**Equatore** il moto apparente degli astri avviene secondo archi di cerchio perpendicolari all'**Orizzonte** e paralleli all'**Equatore Celeste** che in questo caso è il cerchio massimo che passa per i punti cardinali **Est** e **Ovest** e per lo **Zenit** come indicato in **Figura 9**.

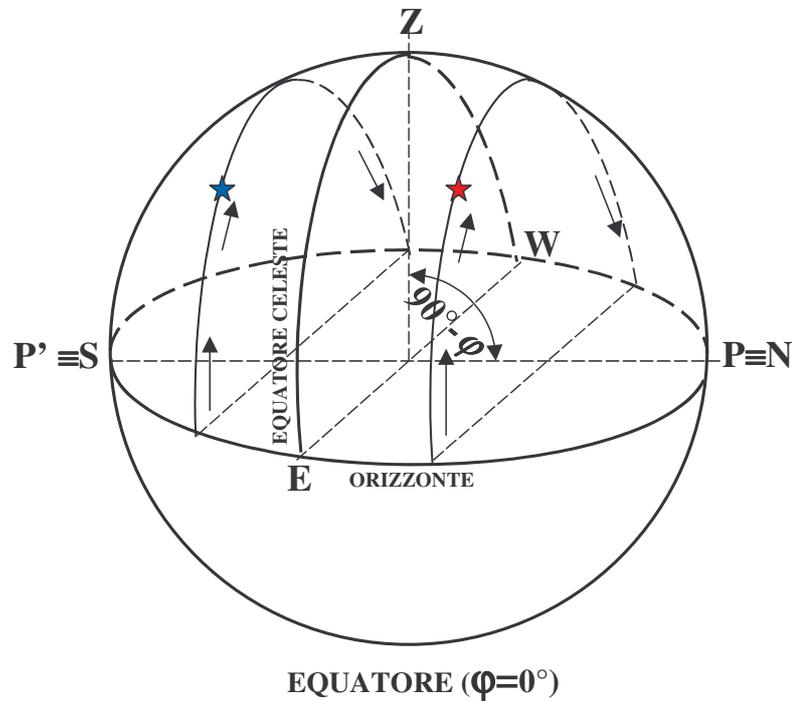


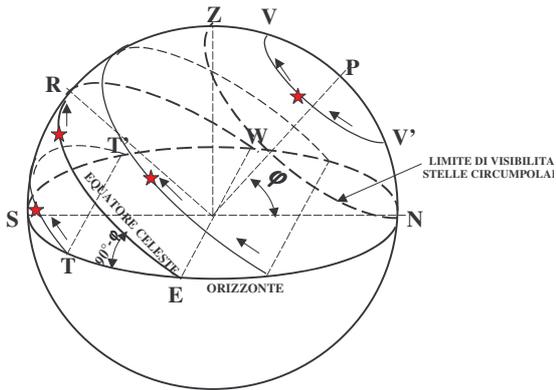
Fig. 9

Inoltre l'asse polare coincide con il piano dell'**Orizzonte** e occupa la posizione dei punti cardinali **Nord e Sud**. Questo è l'unico caso in cui tutti gli astri sorgono, culminano e tramontano restando sopra l'orizzonte per mezzo **Giorno Siderale** (vedi più avanti)

Se invece la località di osservazione è, per esempio, **Torino** che si trova ad una latitudine $\varphi=45^\circ$ tutti gli astri descrivono dei cerchi paralleli all'**Equatore Celeste** che in questo caso è inclinato di $90^\circ - \varphi = 45^\circ$ rispetto all'orizzonte come mostrato in **Figura 10**. Però a differenza del caso precedente il tempo di permanenza degli astri sopra l'orizzonte dipende dalla **Declinazione** dei medesimi, nel senso che per declinazioni negative fino ad un valore minimo (massimo in valore assoluto) di $\delta = -(90 - \varphi) = -45^\circ$ gli archi dei cerchi diventano sempre più piccoli e di conseguenza diventano piccoli anche i tempi di visibilità sopra l'orizzonte (vedi l'arco di cerchio **TT'** di **Figura 10**), mentre gli astri sono visibili per mezzo **Giorno Siderale** quando si trovano sull'**Equatore Celeste**.

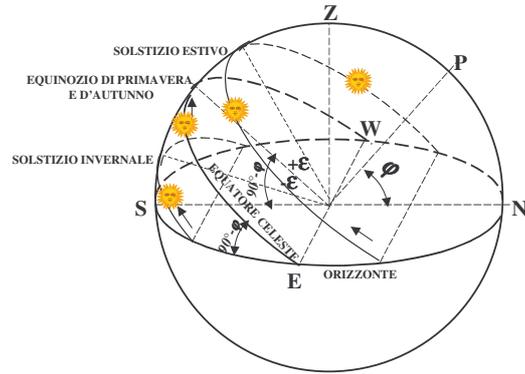
Interessante è il caso in cui gli astri hanno declinazioni maggiori di $\delta = 90^\circ - \varphi$ poiché restano sempre sopra l'orizzonte descrivendo dei cerchi minori completi intorno al Polo Nord Celeste. In tali casi tutte le **Stelle** che soddisfano la condizione sopra citata vengono chiamate genericamente **Stelle Circumpolari** (vedi cerchio minore **VV'** di **Figura 10**)

MOTO APPARENTE DEL SOLE



TORINO ($\phi=45^\circ$)

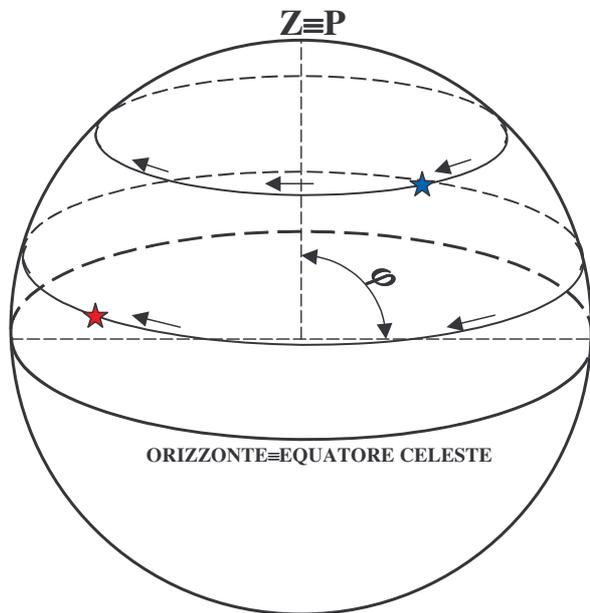
Fig. 10



TORINO ($\phi=45^\circ$)

Fig. 10 bis

Al **Polo Nord** la situazione del moto apparente degli astri è completamente diversa. Infatti come è possibile vedere dalla **Figura 11** tutti gli astri dell'emisfero boreale descrivono dei cerchi paralleli all'**Orizzonte Celeste** che in questo caso è coincidente con l'**Equatore Celeste**. Pertanto questi oggetti saranno sempre circumpolari e quindi staranno sempre sopra l'orizzonte



POLO NORD ($\phi=90^\circ$)

Fig. 11

Il Terzo Sistema o Sistema Equatoriale

Il **Terzo Sistema** è analogo al **Secondo Sistema** ma differisce da quest'ultimo solo per il fatto che le posizioni delle **Stelle** o degli astri in genere sono legate al **Tempo Siderale** di cui si parlerà con maggiore dovizia di dettagli più avanti.

Per il momento anticipiamo brevemente che il **Tempo Siderale** rappresenta l'angolo orario del **Punto Gamma** (γ), altrimenti detto **Punto Equinoziale** o **Vernale**. Questo punto a sua volta altro non è che uno dei due punti ottenuti dall'intersezione del **Piano dell'Eclittica** (piano dell'orbita terrestre intorno al Sole) con il piano dell'**Equatore Celeste**. Il Sole percorrendo apparentemente il **Piano dell'Eclittica** nel corso di un anno taglia l'**Equatore Celeste** due volte e precisamente all'**Equinozio di Primavera**, passando da declinazioni negative a positive e all'**Equinozio d'Autunno** (Ω) da declinazioni positive a negative. Il punto dell'**Equinozio di Primavera** o **Punto Gamma** è stato scelto come origine del sistema di coordinate equatoriali. Questo punto apparentemente fisso in cielo in realtà si muove sull'**Eclittica** molto lentamente per effetto della **Precessione Generale** di una quantità pari a $50''{,}2564$ in senso opposto al moto rotazionale terrestre. Nonostante ciò si è scelto proprio questo punto come origine delle coordinate del **terzo sistema**. Questo punto ha la caratteristica di culminare sempre nello stesso punto di un meridiano ogni **24 ore siderali medie** esatte corrispondenti a $23^h 56^m 04^s{,}09053$ di **Tempo Solare Medio** dei nostri orologi (vedi più avanti ulteriori dettagli sulla **Precessione** e sul **Tempo Siderale**).

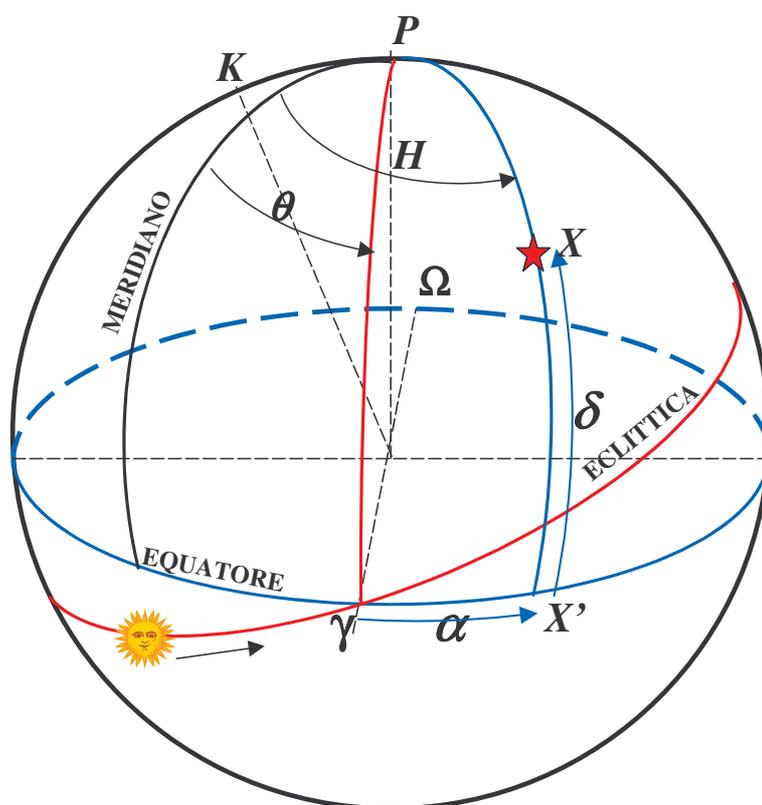


Fig. 12

Immaginando per un momento fisso il **Punto Gamma** rispetto alla **Stella X** di **Figura 12**. La distanza angolare di questa contata positivamente in ore minuti e secondi di **Tempo Siderale** dal **Punto Gamma** fino alla proiezione della **Stella X** nel punto **X'** sull'**Equatore** viene chiamata **Ascensione Retta**, α . Questa è la prima coordinata del **terzo sistema (o equatoriale)** che differisce dall'angolo orario H del precedente sistema secondo la seguente relazione:

$$\vartheta = H + \alpha \quad (58)$$

Quindi conoscendo il **Tempo Siderale** θ e l'**Angolo Orario** H della **Stella** è possibile calcolare il valore di α invertendo la (58):

$$\alpha = \vartheta - H \quad (59)$$

Si ricorda che l'angolo orario θ del **Punto Gamma** coincidente con il **Tempo Siderale** nel luogo di osservazione è negativo quando questo punto deve ancora passare in meridiano alla sua culminazione superiore e positivo dopo la culminazione. Analogo discorso per l'angolo orario H della **Stella X** che va preso con il segno negativo prima del passaggio in meridiano e positivo dopo .

Poiché le **Ascensioni Rette** hanno sempre valori compresi tra le ore zero e le ore 24 **siderali**, se utilizzando la (59) α dovesse risultare negativo, è sufficiente fare il complemento alle 24 ore per avere l'**Ascensione Retta** corretta.

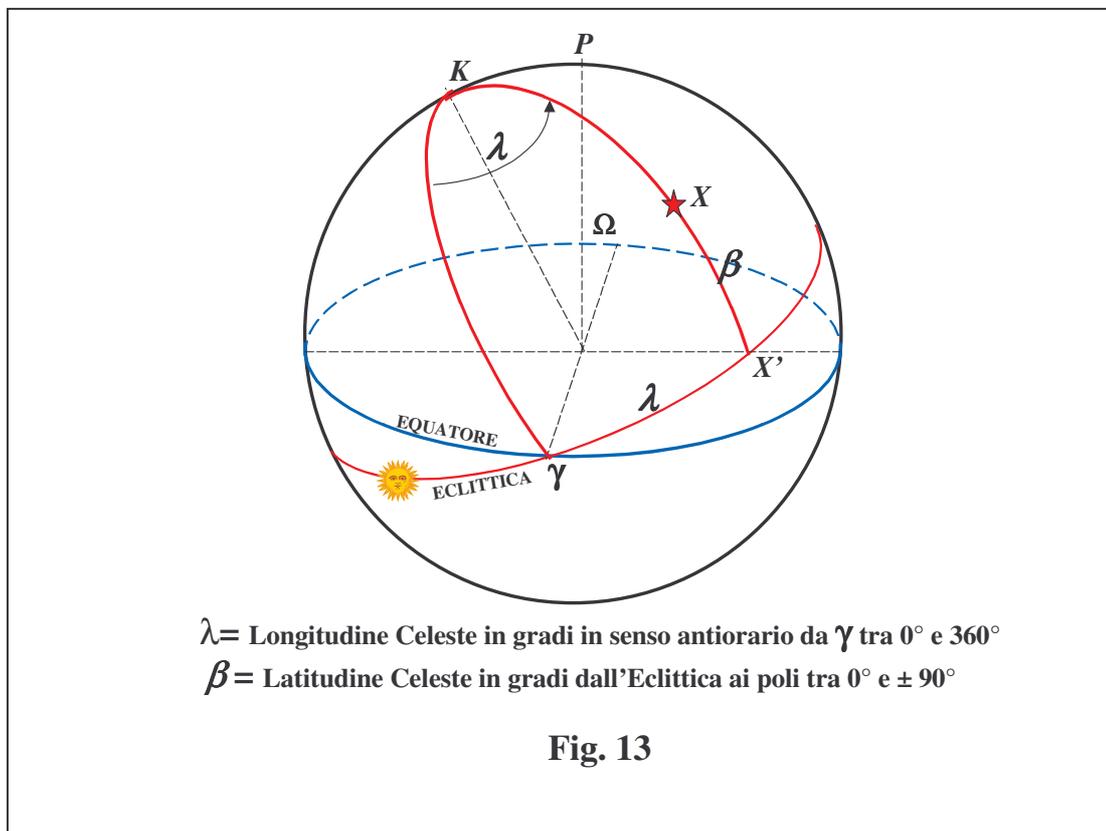
La seconda coordinata di questo sistema, continua invece ad essere la **Declinazione** δ vista nel precedente sistema di coordinate orario.

In genere nei cataloghi astronomici vengono fornite le **Ascensioni Rette** e le declinazioni delle **Stelle** anziché le coordinate del sistema orario (H e δ del secondo sistema), in quanto le α e le δ sono coordinate approssimativamente fisse per ogni **Stella**, alla condizione che i tempi in gioco non siano eccessivamente lunghi, nel qual caso subentrerebbero i fenomeni della **Precessione Generale, del Moto Proprio ed altri ancora** che ne modificherebbero la posizione in cielo. Di tutti questi fenomeni se ne darà una dettagliata descrizione nei capitoli successivi.

Il Quarto Sistema o Sistema Eclitticale

Un altro sistema di coordinate astronomico è quello in cui le posizioni delle **Stelle** vengono riferite al **Piano dell'Eclittica** , cioè quel piano secondo cui la **Terra** o, meglio ancora, il baricentro del sistema **Terra-Luna** rivolge intorno al **Sole** (vedi **Figura 13**). Questo piano ideale interseca l'**Equatore Celeste** secondo un angolo ϵ praticamente fisso di circa **23°5**. L'**Equatore Celeste** e l'**Eclittica** hanno due punti in comune: il **Punto Gamma** (γ) o **punto d'Ariete** e il **punto Omega** (Ω) o punto del segno della **Bilancia** , che entrambi appartengono, per tradizione, a due dei **12 segni zodiacali**. A questo proposito vogliamo ricordare che la fascia dei 12 segni zodiacali non corrisponde al giorno d'oggi alle attuali costellazioni che vediamo in cielo, in quanto queste erano coincidenti con i segni zodiacali circa 3000 anni fa. Oggi l'**Equatore Celeste**, per effetto della **Precessione degli Equinozi**, che vedremo più avanti, taglia l'**Eclittica** al **punto Gamma** nella costellazione dei **Pesci** e al punto **Omega** nella costellazione della **Vergine**. Poiché l'Astrologia affonda le radici nel lontano passato e

non ha subito sostanziali modifiche con il passar dei secoli, ecco perché ancora oggi ci si riferisce ai segni zodiacali di 3.000 anni fa quando si parla della posizione del **Sole** all'inizio delle varie stagioni



Quindi la posizione di una **Stella** riferita a questo sistema di coordinate è data dalla **Longitudine Eclittica λ** contata positivamente in gradi dal **Punto Gamma** in senso antiorario fino ad incontrare il cerchio meridiano in **X'** passante per il **polo dell'Eclittica K** e per la **Stella**. La seconda coordinata viene chiamata **Latitudine Eclittica β** ed è contata positivamente in gradi dal piano dell'**Eclittica** verso il **Polo Nord dell'Eclittica** o negativamente verso il **Polo Sud dell'Eclittica** fino ad incontrare la **Stella**.

Il Quinto Sistema o Sistema Galattico

Come è noto il **Sole** è una delle tante **Stelle** (circa **200 miliardi**) che formano la nostra **Galassia** chiamata **Via Lattea**. La nostra **Galassia**, come molte altre nell'universo, si presenta come un enorme disco appiattito di circa **100 000 anni luce di diametro**. Il **Sole** giace appunto su questo disco e si trova a circa **2/3 dal Centro Galattico**. Pertanto dal **Sole**, e quindi dalla **Terra**, il disco galattico è visibile come una debole fascia luminosa che solca il cielo secondo un ideale cerchio massimo.

Questo cerchio massimo, chiamato **Equatore Galattico** interseca l'**Equatore Celeste** secondo un angolo di **$62^\circ 20'$** (Figura 14), mentre le **Coordinate Equatoriali del Centro Galattico** risultano essere **$\alpha = 17^{\text{h}}9^{\text{m}}18^{\text{s}}$** e **$\delta = -28^\circ 54'$** . Ovviamente perpendicolare all'**Equatore Galattico** troviamo i due poli galattici **Nord e Sud**.

La prima coordinata di questo sistema è la **Latitudine Galattica b** che è misurata in gradi tra 0° e $\pm 90^\circ$ sul cerchio passante per il **Polo Galattico** e per la **Stella** considerata, positivamente o negativamente a seconda che si trovi nell'emisfero **Nord o Sud** rispetto al **Piano Galattico**, concordemente con i **Poli Celesti Equatoriali**. La seconda coordinata è la **Longitudine Galattica l** contata in gradi tra 0° e 360° in senso antiorario sull'**Equatore Galattico** a partire dal **Centro Galattico** fino ad intersecare il **Meridiano Galattico** passante per la **Stella** (Figura 14). Tali coordinate vengono indicate con l'' e b'' per distinguerle dalle vecchie coordinate l' e b' riferite ad un **Equatore Galattico** leggermente diverso e ad un punto origine definito dal nodo ascendente dell'**Equatore Galattico** con l'**Equatore Celeste**. Va ricordato che i valori delle coordinate del **Centro Galattico** e del **Poli Galattici** riportati nel testo e in **Figura 14** sono solo indicativi in quanto vengono aggiornati con il passar degli anni grazie al continuo miglioramento delle osservazioni di posizione da **Terra** e dallo spazio.

SISTEMA DI COORDINATE GALATTICO

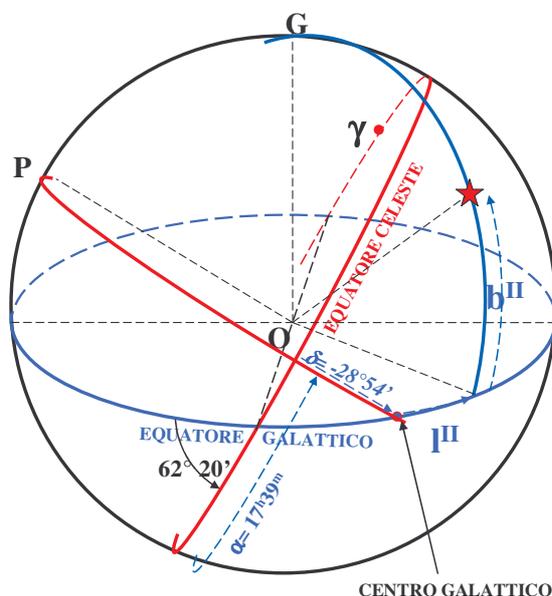


Figura 14

Trasformazioni di coordinate dal I al II sistema e dal III al IV e viceversa

Il passaggio da un sistema di coordinate ad un altro è un'operazione che implica l'utilizzo delle formule di trigonometria sferica viste in precedenza. Queste formule vanno opportunamente applicate ai triangoli sferici che si vengono a formare dall'intersezione dei piani fondamentali di riferimento (**Equatore Celeste, Equatore Galattico, Orizzonte ed Eclittica**) con i loro **Meridiani** passanti per la **Stella**.

In altri termini, per il passaggio delle coordinate dal sistema **Altoazimutale** a quello **Orario/Equatoriale** o viceversa è sufficiente applicare le prime 3 formule di trigonometria sferica al

triangolo **ZXP** di **Figura 15**, dove nella stessa **Figura** sono riportate le formule di soluzione del suddetto triangolo, con ovvio significato di simboli .

Stesse considerazioni per passare dalle coordinate del **III sistema a quelle del IV** e viceversa, in cui la soluzione del triangolo **KPX** di **Figura 16** permette di ottenere le coordinate desiderate utilizzando le formule riportate sempre nella stessa **Figura** .

Un altro modo per passare da un sistema di coordinate ad un altro (ad esempio da coordinate altoazimutali a equatoriali, ecc) è quello di far uso del calcolo vettoriale e matriciale piuttosto che della trigonometria sferica (per ulteriori dettagli su queste trasformazioni si consulti **l'Appendice B**)

TRASFORMAZIONI DAL I AL II SISTEMA E VICEVERSA
SOLUZIONE DEL TRIANGOLO SFERICO ZXP

DAL I AL II SISTEMA

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z \cos A \\ \cos \delta \cos H &= \cos z \cos \varphi + \sin z \sin \varphi \cos A \\ \sin H &= \sin A \sin z / \cos \delta \\ \alpha &= \vartheta - H \end{aligned}$$

DAL II AL I SISTEMA

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H \\ \sin A &= \cos \delta \sin H / \sin z \\ \sin z \cos A &= -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos H \end{aligned}$$

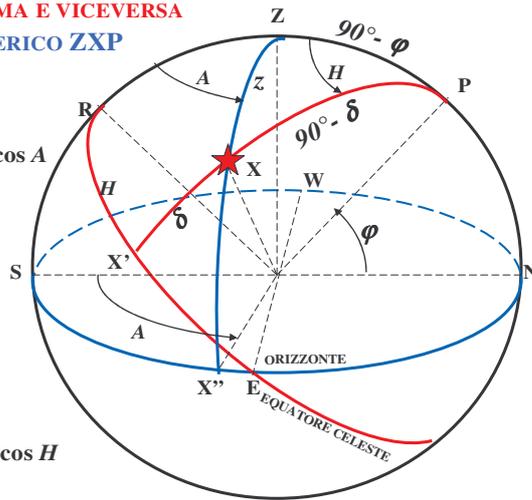


Figura 15

TRASFORMAZIONI DAL III AL IV SISTEMA E VICEVERSA
SOLUZIONE DEL TRIANGOLO SFERICO KXP

DAL III AL IV SISTEMA

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \cos \epsilon \sin \delta - \sin \epsilon \cos \delta \sin \alpha \\ \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha / \cos \beta \\ \cos \beta \sin \lambda &= \sin \delta \sin \epsilon + \cos \delta \cos \epsilon \sin \alpha \end{aligned}$$

DAL IV AL III SISTEMA

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \cos \epsilon \sin \beta + \sin \epsilon \cos \beta \sin \lambda \\ \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda / \cos \delta \\ \cos \delta \sin \alpha &= -\sin \beta \sin \epsilon + \cos \beta \cos \epsilon \sin \lambda \end{aligned}$$

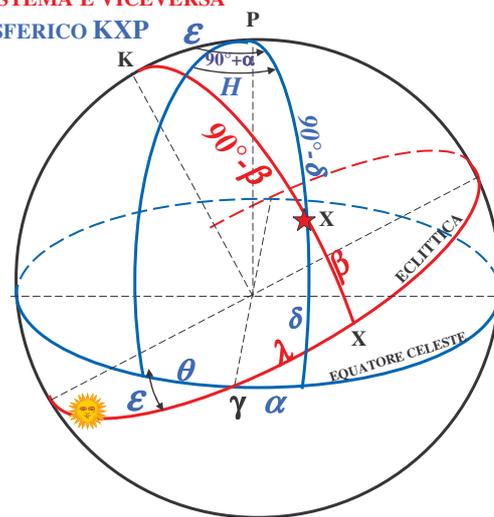


Figura 16

La Misura del Tempo e i Moti della Terra

Cenni storici sulle Unità di Tempo

Le prime due **Unità di Tempo** macroscopiche a disposizione dell'uomo, legate ad eventi periodici, sono quelle comunemente definite **Giorno** ed **Anno**.

Entrambe hanno origine con la comparsa dell'uomo sulla **Terra**, in quanto genericamente il **Giorno** era considerato come il periodo di tempo legato al succedersi alternativo della luce e delle tenebre; mentre l'**Anno** era considerato come il periodo di tempo trascorso per ritornare alla medesima stagione.

Ovviamente queste **Unità di Tempo** definite così grossolanamente erano forse sufficienti per l'uomo primitivo ma non per l'uomo delle prime civiltà.

Infatti a partire dalla **IV dinastia egizia** si sentì la necessità di suddividere il giorno in parti.

Questa suddivisione consisteva di 24 parti, di cui 12 uguali competevano al periodo di luce e altrettante alle tenebre. Tale soluzione portava ad avere una disparità tra le parti diurne e notturne in quanto come è noto la durata di queste è legata in maniera vincolante alla stagione in cui ci si trova.

Ricordiamo infatti che in inverno, per le nostre latitudini, le tenebre hanno il sopravvento sulla luce mentre in estate accade esattamente il contrario.

Solo nel **settimo secolo a.C.** gli **Egizi** suddivisero il **Giorno in 24 parti uguali**. Lo stesso fecero i **Babilonesi e i Cinesi** che lo suddivisero però solo in **12** (**G. Cecchini, 1969**).

Questi ultimi tennero tale suddivisione fino al **1670**, dopodiché ripartirono il giorno in **24 ore** di uguale durata.

Fino a questo momento abbiamo parlato di durata del **Giorno** e della sua suddivisione, ma non abbiamo ancora stabilito il criterio con cui è stato introdotto l'istante di inizio del medesimo.

Al solito occorre andare indietro nel tempo per vedere in quale modo avevano stabilito tale inizio le varie civiltà.

I **Babilonesi** consideravano l'inizio del **Giorno** con il levar del **Sole**, sistema adottato anche dai **Greci, Persiani e Romani**, mentre gli **Israeliti e gli Arabi** lo fecero iniziare con il tramonto.

A partire da **Tolomeo** fu usato il **Sistema Astronomico** con l'inizio a mezzogiorno (**Giorno Astronomico**), mentre **Ipparco di Nicea** introdusse il **Sistema Egizio** con l'inizio a mezzanotte (**Giorno Civile**), sistema tuttora usato per scopi civili.

Ora, prima di analizzare come è stato definito l'**Anno** vediamo di accentrare la nostra attenzione sulla definizione di **Giorno** cercando di capire le cause astronomiche che ne hanno determinato la sua esistenza. A tal proposito occorre precisare che l'alternanza della luce e delle tenebre è dovuta principalmente al moto di rotazione della **Terra** attorno al proprio asse e solo secondariamente al moto di rivoluzione di questa intorno al **Sole**.

Giorno Sidereo o Rotazionale e variazioni del moto di rotazione terrestre

Per il momento incominciamo ad esaminare solo il moto di rotazione della **Terra** intorno al proprio asse polare. Ne segue che se tale rotazione fosse rigorosamente costante e fissa come orientamento nello spazio, un osservatore posto sulla **Terra** constatarebbe il passaggio in meridiano di una **Stella** fissa, cioè priva di **Moto Proprio casuale**, ad intervalli regolari di tempo, diciamo per semplicità ogni **24 ore o 86 400 secondi**.

Questo intervallo di tempo è da taluni chiamato **Giorno Sidereo**, ma sarebbe più opportuno chiamarlo **Giorno Rotazionale Teorico** (vedi **Figura 17**). L'appellativo teorico non è casuale, in quanto la **Terra**, prescindendo dai movimenti di orientamento assiale nello spazio, non ha una rotazione costante attorno al proprio asse, bensì a causa delle frizioni delle maree sul fondo degli oceani, dovute essenzialmente all'azione gravitazionale del **Sole** e della **Luna**, mostra un rallentamento secolare progressivo che ne fa crescere il periodo giornaliero di circa **1,6 millesimi di secondo per secolo** (corrispondenti a $0^s,0016/36525^d = 4,4 * 10^{-8}$ secondi al giorno)

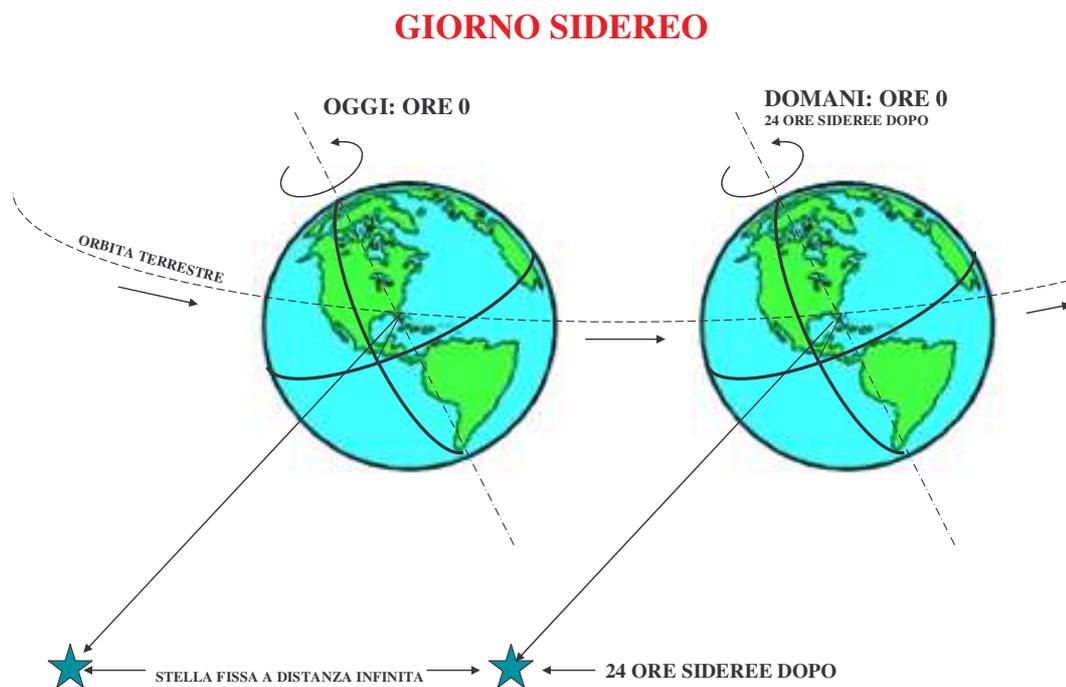
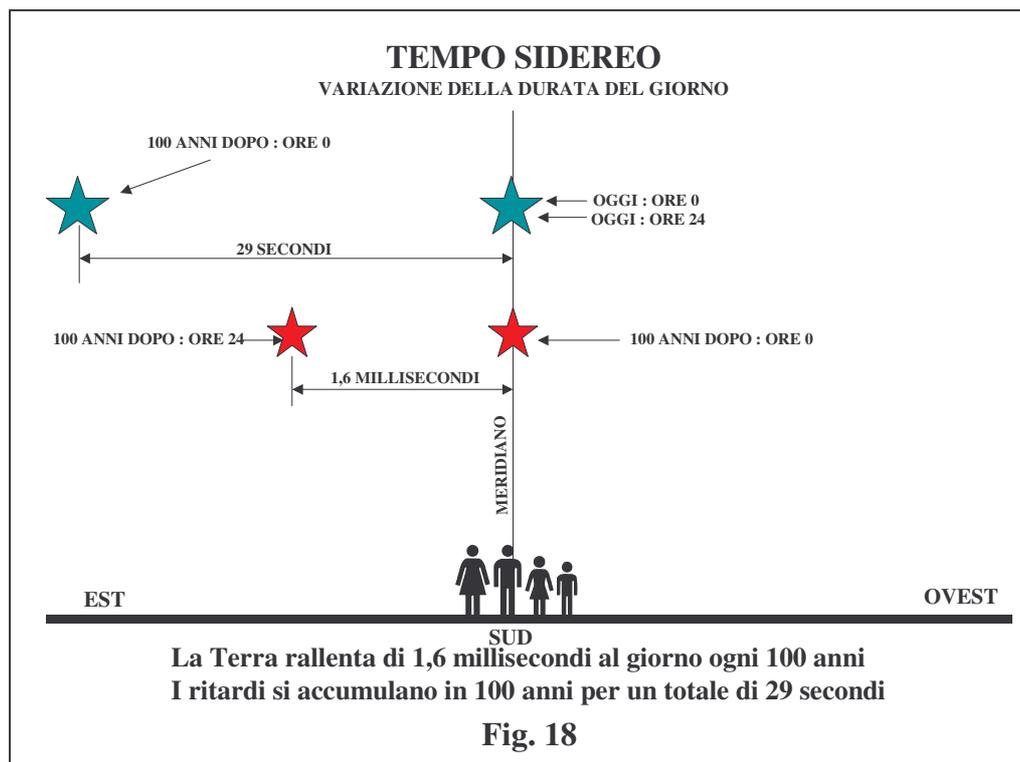


Figura 17

In altri termini, se osservassimo la stessa **Stella** considerata prima, tra **100 anni** noteremmo che il tempo impiegato per passare due volte consecutive allo stesso punto del meridiano sarebbe di **24 ore più 1,6 millesimi di secondo** (vedi **Figura 18**).

Questa quantità apparentemente trascurabile in realtà non lo è, poiché giorno dopo giorno questi ritardi si accumulano portando ad un valore di circa **mezzo minuto in un secolo**; il che equivale a dire che se **100 anni prima** ci fossimo muniti di un orologio precississimo che registrava **24 ore esatte** tra

due passaggi consecutivi della **Stella** in meridiano, **100 anni dopo** dovremmo ancora attendere **circa mezzo minuto (dopo le ore 24)** per avere il passaggio in meridiano della medesima **Stella**.



Purtroppo la nostra **Terra** non essendo un corpo rigido subisce delle deformazioni dovute all'azione gravitazionale combinata del **Sole** e della **Luna** sulle enormi masse solide, liquide e gassose di cui essa è composta.

Il risultato di queste deformazioni porta, astruendo sempre dall'orientamento dell'asse terrestre nello spazio, a delle **Variazioni Secolari, Accidentali e Periodiche** del periodo di rotazione (**F. Mignard, 1981**).

Le Irregolarità Secolari della **Terra**, come accennato prima, furono messe in evidenza nel **1939** da **Spencer Jones** studiando il moto della **Luna** e dei **Pianeti**. Egli notò che la **Terra** in un periodo di **300 anni** rallentava costantemente di **1,6 millisecondi ogni secolo**. Questo dato fu successivamente confermato da uno studio esteso fino a **3.000 anni fa** utilizzando i dati di antiche eclissi di **Sole** e di **Luna**. Una rappresentazione grafica di questo rallentamento secolare è mostrato in **Figura 19 con una linea tratteggiata**.

Sovrapposta alla linea tratteggiata è riportata una linea continua molto irregolare che rappresenta **la componente accidentale (casuale)** del moto di rotazione terrestre. In altri termini, se la **Terra** fosse un corpo rigido le frizioni di marea prodotte dal **Sole** e dalla **Luna** metterebbero in evidenza solo la componente secolare. In realtà la **Terra**, come abbiamo già detto, non è rigida, per cui subisce le azioni mareali di questi due astri, sia sulle masse solide che su quelle liquide e gassose. Tali azioni mareali inducono delle variazioni aleatorie (casuali) al moto di rotazione terrestre, come è possibile vedere in **Figura 19 (linea continua)**.

Analizzando solo le **Variazioni Accidentali** si è visto che la **Terra** nel corso del tempo ha subito delle accelerazioni e dei ritardi casuali tanto che fra il **1790** e il **1900** la **Terra**, che precedentemente rallentava di **44/1.000 di secondo all'anno** anticipò quasi regolarmente accumulando circa un minuto, per poi ritardare fino al **1918** di una decina di secondi e di nuovo accelerare come è possibile constatare dalla **Figura 20 (G. Cecchini, 1969)**.

Andando indietro nel tempo ed ammettendo un rallentamento giornaliero costante della **Terra** di **1,6 millisecondi per secolo** si deduce che all'epoca di **Ipparco di Nicea**, vissuto nel secondo secolo avanti Cristo, la durata del giorno doveva essere più corta di **35 millisecondi** rispetto alla durata del giorno attuale

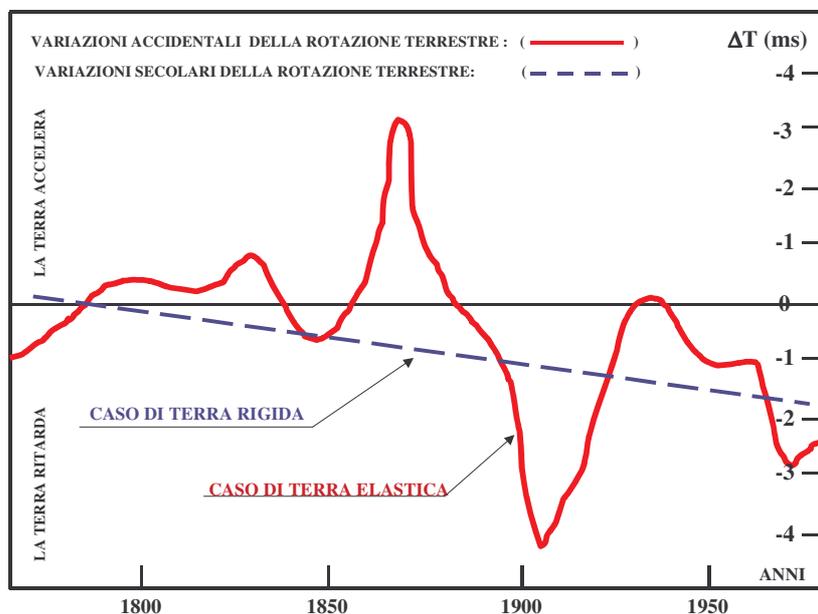


Fig. 19

Questa piccola differenza di tempo dall'epoca di **Ipparco** ad oggi in realtà non è poi così piccola, in quanto tutti questi ritardi si sono accumulati giorno dopo giorno in maniera tale che se a quei tempi si fosse avuto un orologio precisissimo tarato in **24 ore di Tempo Sidereo** si sarebbe osservato ogni giorno il passaggio consecutivo, sullo stesso punto del meridiano, di una **Galassia**, ad esempio, sempre alle ore **0^h00^m00^s** esatte di **Tempo Sidereo**.

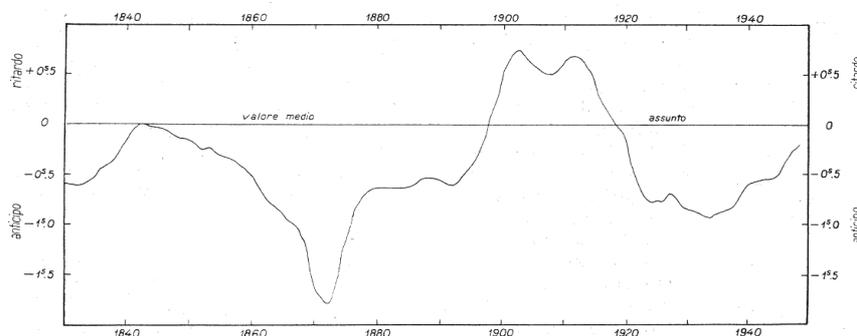


Fig. 20

Dopo **2200** anni, cioè al giorno d'oggi, la stessa **Galassia** la si vedrebbe passare in meridiano alle ore **3^h55^m42^s** di **Tempo Sidereo** ($\Delta T \text{ (sec)} = 0,0016 \cdot 22 \cdot (365,2422 \cdot 2200)/2$), cioè con **circa 4 ore di ritardo**.

Studi più recenti hanno permesso di verificare il rallentamento secolare terrestre andando indietro nel tempo fino a **500 milioni** di anni fa, analizzando il ritmo di crescita dei coralli, delle conchiglie e delle piante rinvenute nei fossili di quell'epoca. Anche in questi casi si è visto che la durata del giorno si è rallentata costantemente di circa **0,0016 secondi per secolo** (F. Mignard, 1981).

Sulla base di questi fatti, ammettendo ragionevolmente che il periodo di rivoluzione della Terra intorno al Sole si sia mantenuto all'incirca costante anche nelle più remote ere geologiche si può dedurre la durata del giorno di quei periodi e di conseguenza sapere di quanti giorni era costituito l'Anno (vedi Figura 21).

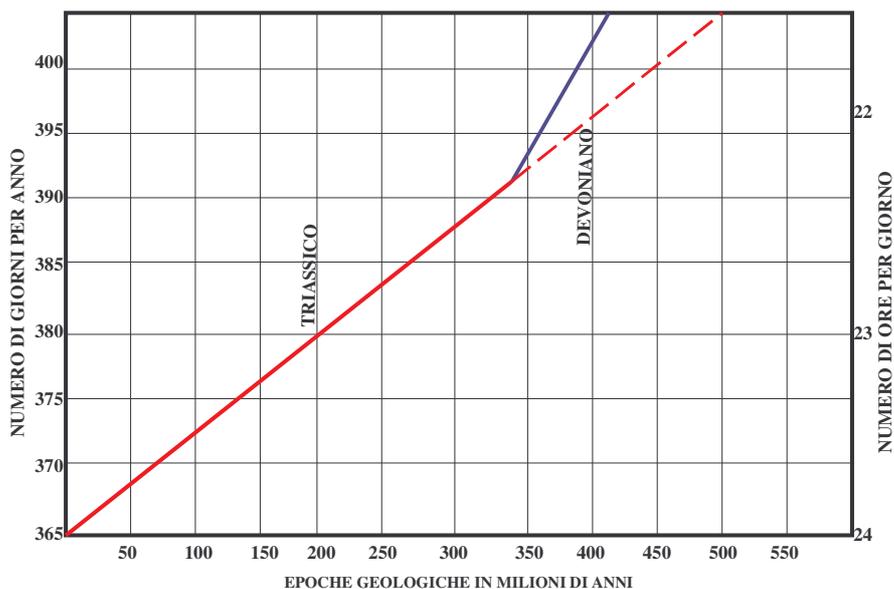


Fig. 21

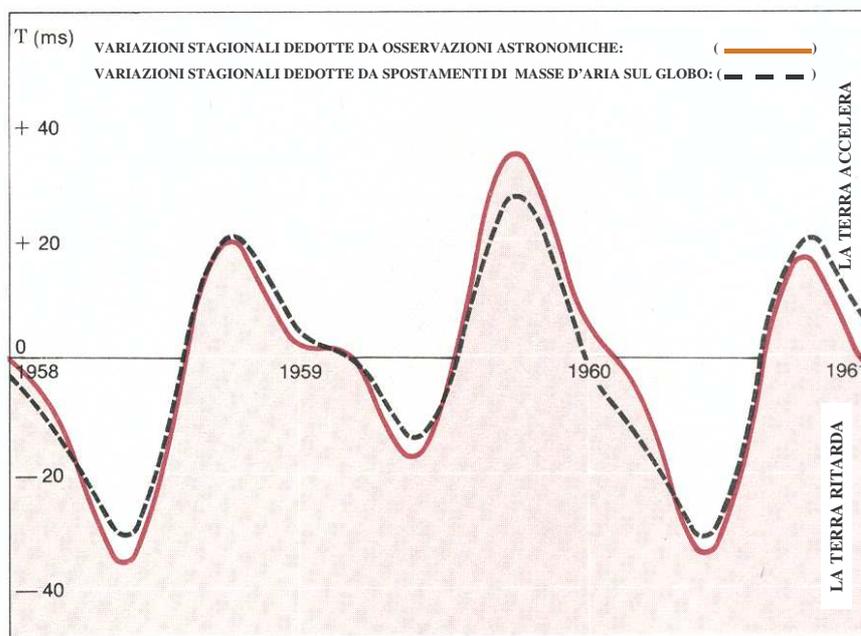
Da questa figura è possibile vedere che nel periodo **Triassico**, cioè circa **200 milioni di anni fa** l'anno durava **380 giorni** ed il giorno era **più corto di un'ora** rispetto ad oggi. Andando ancora più indietro nel tempo, nel periodo **Devoniano** cioè circa **400 milioni di anni fa**, notiamo che l'anno doveva essere di circa **400 giorni** e la durata del giorno di circa **22^h 13^m** (linea tratteggiata estrapolata).

L'allungamento della durata del giorno, con il passare dei millenni, sembra sia dovuto alle frizioni mareali provocate dalla **Luna** e dal **Sole** sui fondali oceanici e dalle deformazioni periodiche delle parti solide del globo terrestre.

Questi effetti, per la conservazione del momento angolare del sistema **Terra – Luna**, determinano di conseguenza un progressivo **allontanamento della Luna** da noi di circa **3 – 5 cm all'anno**.

Le Irregolarità Periodiche o Stagionali furono già scoperte nel **1937 da Stoyko**, il quale verificò che gli orologi di alcuni osservatori erano tutti sistematicamente più avanti o in ritardo rispetto al passaggio delle **Stelle** in meridiano previste per un certo periodo dell'anno. Successivamente si comprese che la **Terra ruotava più in fretta in estate che in inverno** relativamente **all'emisfero Nord**, nel senso che la differenza di tempo registrata tra la durata di un giorno del mese di **Dicembre** e di un giorno del mese di **Luglio** ammonta a circa **1 millesimo di secondo** cioè a **1 centomillesimo di giorno**. Questa quantità apparentemente trascurabile si accumula nel tempo rallentando il passaggio in meridiano delle **Stelle** di circa **30 millisecondi** da **Dicembre a Maggio**.

Come è possibile vedere dalla **Figura 22** , per effetto delle variazioni stagionali, la **Terra tende a rallentare** in maniera non del tutto lineare **dal mese di Ottobre fino al mese di Maggio** per poi incominciare ad **accelerare** più regolarmente **da questo mese all'Ottobre successivo** (F. Mignard, 1981) .



Nella stessa figura sono riportate due curve: la prima a tratto pieno mostra le variazioni stagionali dedotte dalle osservazioni astronomiche, mentre la seconda, tratteggiata, riporta le variazioni dedotte dagli spostamenti delle enormi masse d'aria che avvengono tra un emisfero e l'altro del globo terrestre nel corso di un anno. Come si vede l'ottima concordanza tra le due curve è un'indicazione precisa che le variazioni stagionali sono attribuibili proprio alle circolazioni di masse d'aria ad alte altitudini. D'altra parte lo spostamento stagionale di una massa d'aria da un emisfero all'altro, quantificata in circa $6 \cdot 10^{16}$ Kg e corrispondente ad un **cubo di ghiaccio di 40 km di lato**, è in grado di provocare una variazione massima nella rotazione terrestre di **1 millesimo di secondo in mezzo anno**.

Giorno Siderale

Per poter parlare di **Giorno Siderale** , dobbiamo considerare un insieme di fenomeni che dipendono dal **Sole**, dalla **Luna** e dai **Pianeti**, i quali alterano la posizione spaziale dell'asse di rotazione terrestre.

Al solito analizziamo ogni singolo fenomeno per non creare confusione, ricordando alcuni concetti basilari di astronomia.

E' noto che la **Terra** **rivolve** attorno al **Sole** descrivendo un'orbita ellittica su di un piano detto **Piano dell'Eclittica** la cui **Eccentricità** è data dalla seguente relazione :

$$e = 0,01675104 - 0,00004180 \cdot T - 0,000000126 \cdot T^2$$

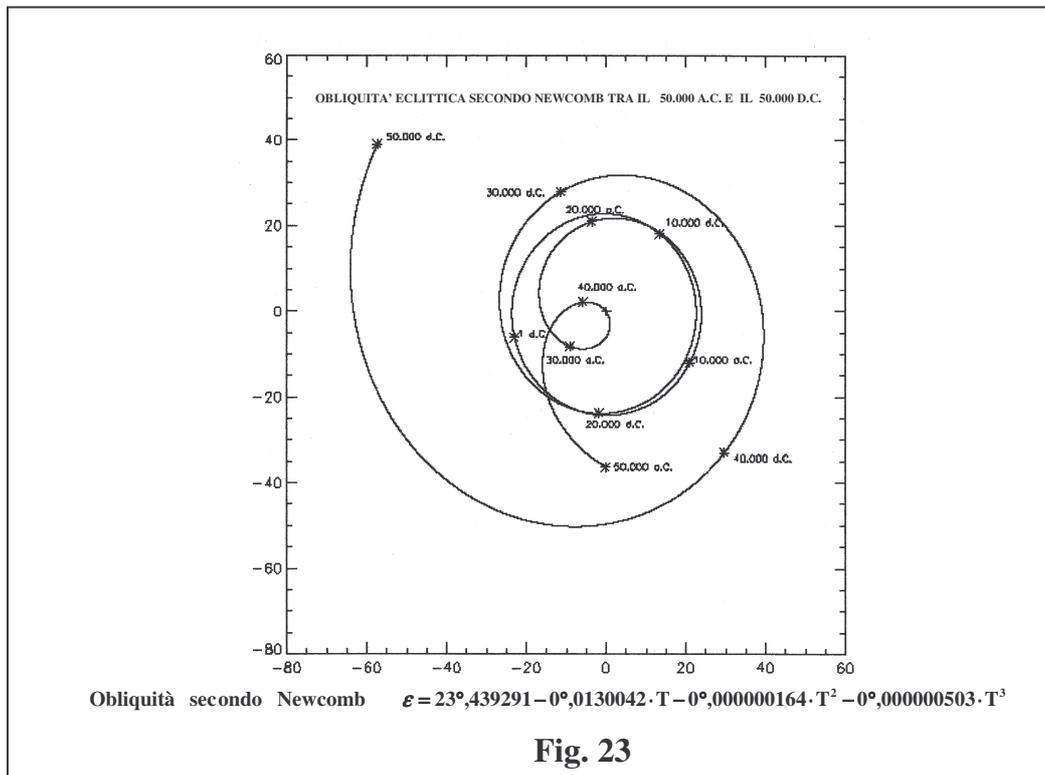
dove $T = d/36.525,0$ corrisponde al numero di **Secoli Giuliani** trascorsi dal **31 dicembre 1899 alle ore 12 di Tempo delle Effemeridi** (vedi più avanti) mentre d è invece il numero di giorni trascorsi da questa data. Studi recenti effettuati da **Quinn et al., 1991** hanno dimostrato, con una simulazione al computer coprente un periodo di **3 milioni di anni**, che l'**Eccentricità** è cambiata periodicamente ogni circa **100 000 anni** raggiungendo il **minimo** valore a **0,000 016** e il **massimo** valore a **0,057 88**. E' pure noto che la **Terra** nel corso del suo moto intorno al **Sole** si porta in punti alternativamente di massima e minima distanza da questo, detti rispettivamente **Afelio** e **Perielio** variando la sua distanza, ai giorni nostri, in più e in meno di circa **2,5 milioni di km** rispetto ai **149.597.870,691 km** di distanza media effettiva. Anche in questo caso studi recenti condotti da **Quinn et al., 1991** hanno messo in evidenza, sempre con una simulazione su **3 milioni di anni** che il semiasse maggiore dell'orbita terrestre cambia pochissimo con periodicità di **100.000 anni** discostandosi al massimo dal valor medio di appena **±2,8 Km**.

Inoltre sappiamo che l'asse di rotazione terrestre è inclinato rispetto al piano dell'**Eclittica** ed é variabile con il tempo secondo la relazione indicata da **Newcomb** nel **1895** e tuttora usata (**Explanatory Supplement, 1992**):

$$\epsilon = 23^{\circ},439291 - 0^{\circ},0130042 \cdot T - 0^{\circ},000000164 \cdot T^2 - 0^{\circ},000000503 \cdot T^3$$

dove T questa volta rappresenta il numero di **Secoli Giuliani** trascorsi dal **1° Gennaio 2000 alle ore 12 di ET** (vedi avanti).

A tal proposito si ricorda che il valore di ϵ sopra riportato ed attualmente usato nel calcolo della **Precessione** (vedi più avanti) è rigoroso per circa **4.000 – 5.000 anni**, avanti e indietro nel tempo, dopodiché i valori dell'obliquità tendono a divergere esponenzialmente se ci si spinge in avanti o indietro di **50.000 anni**, come è possibile vedere dalla **Figura 23**.



Una formulazione più recente e più realistica è stata fornita in questi ultimi anni da alcuni studiosi di **Meccanica Celeste** e di **Paleoclima**, i quali sostengono che l'obliquità dell'**Eclittica** oscilla periodicamente di circa $\pm 1^\circ$ e **mezzo** rispetto ad un valor medio (attuale) di $23^\circ 27'$, completando una oscillazione completa (da un valore massimo all'altro) in **circa 41.000 anni**, come è possibile vedere dalla **Figura 24**. Il fatto che l'obliquità dell'**Eclittica** vari così poco e sia così stabile nel corso dei millenni, sembra sia dovuta alle perturbazioni esercitate della **Luna** che, trovandosi periodicamente sopra e sotto il piano dell'**Eclittica**, mantengono l'asse polare confinato nel grado e mezzo sopra citato.

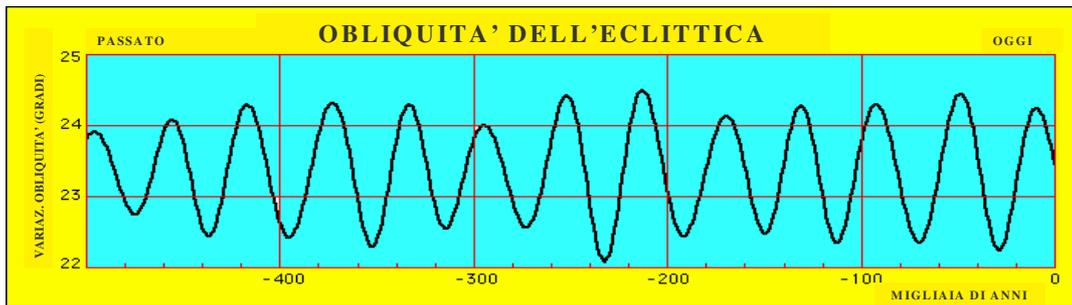


Fig. 24

La relazione di **A. Berger e M.F. Loutre (1990)**, utilizzata per riprodurre la figura, messa sotto forma di serie trigonometrica con **N=46** componenti, in cui ϵ_0 è l'obliquità media, a_i è l'ampiezza, ω_i è la pulsazione, Φ_i la fase all'origine e t il tempo a partire dal **2000** espresso in **migliaia di anni**, ha la seguente forma:

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 + \sum_{i=1}^N a_i \cdot \cos(\omega_i \cdot t + \Phi_i)$$

Ora, in base a questi elementi, supponiamo per un momento che l'orientamento dell'asse di rotazione terrestre sia fisso verso una certa direzione dello spazio, con obliquità costante rispetto all'**Eclittica**. Ne segue quindi che, l'intersezione del piano equatoriale (perpendicolare all'asse di rotazione) con il piano dell'**Eclittica**, darà origine a una linea (**Linea dei Nodi**) che prolungata nello spazio determinerà sulla volta **Celeste** due punti, diametralmente opposti detti **Equinozi**, che possiamo immaginare come due **Stelle** fittizie sullo scenario delle **Stelle** vere (vedi **Figura 25**).

MOTO APPARENTE DELLE STELLE IN CIELO

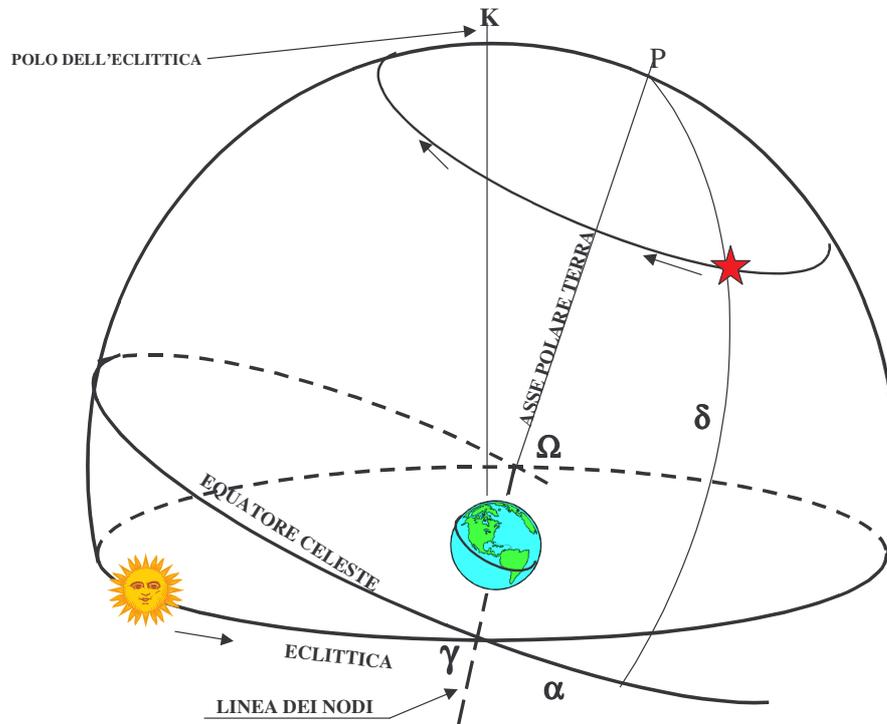


Fig. 25

Si ricorda che il **Sole** nel suo moto apparente sull'**Eclittica** occupa la posizione degli **Equinozi** rispettivamente all'inizio di **Primavera (Punto Υ)** e d'**Autunno (Punto Ω)**.

E' proprio dal **Punto Υ** che vengono misurate le coordinate equatoriali delle **Stelle** chiamate rispettivamente **Ascensione Retta (α)** (contata positivamente sull'**Equatore Celeste** dal **Punto Υ** verso **Est in ore minuti e secondi di Tempo Siderale**) e **Declinazione (δ)** (contata in gradi e frazioni di grado sul meridiano passante per la **Stella**, positivamente dall'**Equatore Celeste** verso il **Polo Nord Celeste** e negativamente verso il **Polo Sud** (vedi **Figura 25**)).

Pertanto, se osservassimo una di queste **Stelle** fittizie culminare due volte consecutivamente in meridiano, constateremmo effettivamente il periodo rotazionale terrestre denominato semplicisticamente **Giorno Siderale**. In realtà la definizione di **Giorno Siderale** è leggermente più complessa in quanto ingloba anche dei fenomeni a lentissimo periodo come la **Precessione** e fenomeni a periodo più breve come la **Nutazione**.

Precessione Generale

Si è detto che la **Terra** non è un corpo rigido né tanto meno sferico in quanto presenta un rigonfiamento equatoriale di una **ventina di km in più** rispetto ai **6.357 km** del suo raggio polare, per cui l'azione combinata del **Sole** e della **Luna** ed in piccola parte dei **Pianeti** su tale rigonfiamento, alterano l'orientamento dell'asse di rotazione. Ora, se la **Luna** rivolgesse attorno alla **Terra** sullo stesso piano dell'**Eclittica** si verificherebbe soltanto il fenomeno detto **Precessione Luni-Solare**, consistente in un movimento conico dell'asse di rotazione (opposto al movimento rotazionale) attorno all'asse perpendicolare al piano dell'**Eclittica**. Questo avviene perché a causa della forma ellissoidale della **Terra**, il **Sole** e la **Luna** oltre ad esercitare una forza diretta verso il centro del geoide generano anche una coppia di forze uguali ma di verso opposto su due punti interni alla **Terra** e simmetrici rispetto al centro. In seguito a ciò la coppia associata al moto di rotazione assiale genera sulla **Terra** stessa un effetto giroscopico con conseguente rotazione dell'asse terrestre intorno al **Polo** dell'**Eclittica** o il che è equivalente ad uno spostamento annuo dell'**Equinozio** sull'**Eclittica** in senso orario della seguente quantità (**Explanatory Supplement, 1961**):

$$\psi = 50'',3708 + 0''000049 \cdot (T - 1900,0) \quad (T: \text{espresso in Anni Tropic}).$$

Vogliamo ricordare che il valore di ψ sopra riportato congloba gli effetti della **Precessione Solare** per un ammontare di **16'',80/anno** e della **Precessione Lunare** di **33'',58/anno** e che pertanto viene chiamata **Precessione Luni-Solare**

Questo spostamento annuo, così lento, porta l'equinozio (o l'asse terrestre) a compiere un giro completo sulla sfera **Celeste** in un periodo di circa **25.730 anni**.

Ovviamente, lo spostamento del **Punto Gamma** e di conseguenza dell'origine del sistema di coordinate celesti, porta inevitabilmente ad una variazione delle coordinate equatoriali delle **Stelle** con il passar del tempo.

Pertanto se volessimo calcolarci le variazioni delle coordinate equatoriali delle stelle dovute esclusivamente al fenomeno della **Precessione Luni-Solare** potremmo aiutarci per la formulazione con la **Figura 26**.

Da questa figura si evince che la posizione di una **Stella S** ad una certa epoca t avrà coordinate equatoriali (α, δ) mentre all'epoca t_1 , (ad esempio dopo un anno) per effetto della **Precessione Luni-Solare** l'asse polare terrestre si sarà spostato da P in P_1 e le coordinate della **Stella** riferite all'**Equatore 1** saranno (α_1, δ_1) . Sempre dalla stessa figura si vede che lo spostamento lungo l'**Eclittica** da γ a γ_1 corrisponde al valore della **Precessione Luni-Solare** in **Longitudine** ψ vista poco fa. Inoltre si osserva che:

$$PS = 90^\circ - \delta$$

$$P_1S = QS = 90^\circ - \delta_1$$

(avendo costruito l'arco P_1Q perpendicolare a PS)

$$K\hat{P}_1S = 90^\circ + \alpha_1$$

$$K\hat{P}S = 90^\circ + \alpha$$

$$KS = 90^\circ - \beta$$

$$\begin{aligned} \widehat{PKS} &= 90^\circ - \lambda \\ \widehat{P_1KS} &= 90^\circ - \lambda_1 \\ \widehat{KPP_1} &\approx 90^\circ \end{aligned}$$

Consideriamo ora il triangolo sferico KPP_1 , sapendo che $KP=KP_1= \varepsilon$ (obliquità dell'Eclittica) dalla formula dei seni si ha che:

$$\sin(\widehat{PP_1}) = \sin \psi \cdot \sin \varepsilon$$

ma essendo $\widehat{PP_1}$ un arco di cerchio minore e ψ un angolo piccolo questa relazione si può scrivere:

$$\widehat{PP_1} = \psi \cdot \cos(90^\circ - \varepsilon) = \psi \cdot \sin \varepsilon$$

Passando al triangolo PP_1Q (retto in Q per costruzione) si ha che:

$$PQ = \delta_1 - \delta = \widehat{PP_1} \cdot \cos \alpha$$

sostituendo $\widehat{PP_1}$ visto prima in quest'ultima relazione si ha:

$$\Delta\delta = \delta_1 - \delta = \psi \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos \alpha$$

che rappresenta proprio la variazione in declinazione nell'intervallo di tempo da t a t_1 (in questo caso 1 anno) dovuta al fenomeno della **Precessione Luni-Solare**.

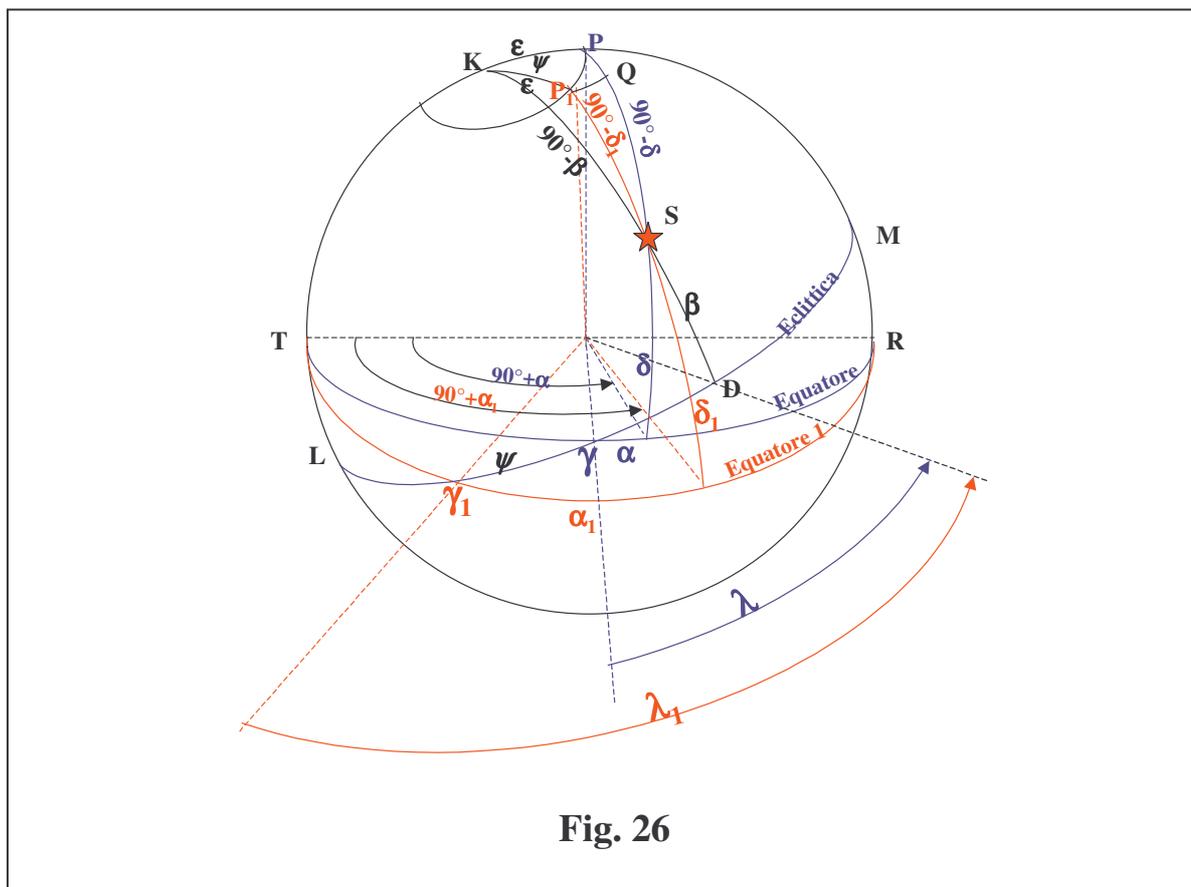


Fig. 26

Per calcolare la variazione in ascensione retta dovuta a questo fenomeno dobbiamo considerare i triangoli sferici KPS e KP_1S di **Figura 26**. Con la prima formula di trigonometria sferica si ricava il valore di β (latitudine Eclittica all'istante t) dal triangolo KPS :

$$\sin \beta = \cos \varepsilon \cdot \sin \delta - \sin \varepsilon \cdot \cos \delta \cdot \sin \alpha$$

mentre dal triangolo $\mathbf{KP}_1\mathbf{S}$ si ricava analogamente lo stesso valore di β :

$$\sin \beta = \cos \varepsilon \cdot \sin \delta_1 - \sin \varepsilon \cdot \cos \delta_1 \cdot \sin \alpha_1$$

se scriviamo:

$$\delta_1 = \delta + \Delta\delta$$

$$\alpha_1 = \alpha + \Delta\alpha$$

e applichiamo le formule di addizione di trigonometria a queste due relazioni, tenendo conto che le quantità $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ sono piccole si ha che:

$$\sin \delta_1 = \sin \delta \cdot \cos \Delta\delta + \cos \delta \cdot \sin \Delta\delta \cong \sin \delta + \Delta\delta \cdot \cos \delta$$

$$\cos \delta_1 = \cos \delta \cdot \cos \Delta\delta - \sin \delta \cdot \sin \Delta\delta \cong \cos \delta - \Delta\delta \cdot \sin \delta$$

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha \cdot \cos \Delta\alpha + \cos \alpha \cdot \sin \Delta\alpha \cong \sin \alpha + \Delta\alpha \cdot \cos \alpha$$

sostituendo queste 3 relazioni nella seconda equazione che fornisce il $\sin\beta$ si ha che:

$$\sin \beta = \cos \varepsilon \cdot (\sin \delta + \Delta\delta \cdot \cos \delta) - \sin \varepsilon \cdot (\cos \delta - \Delta\delta \cdot \sin \delta) \cdot (\sin \alpha + \Delta\alpha \cdot \cos \alpha)$$

sottraendo la prima relazione in $\sin\beta$ da quest'ultima e trascurando i termini prodotto ($\Delta\alpha \cdot \Delta\delta$) si ha infine che:

$$\sin \varepsilon \cdot \cos \alpha \cdot \cos \delta \cdot \Delta\alpha = (\cos \varepsilon \cdot \cos \delta + \sin \varepsilon \cdot \sin \alpha \cdot \sin \delta) \cdot \Delta\delta$$

ma sapendo che:

$$\Delta\delta = \delta_1 - \delta = \psi \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos \alpha$$

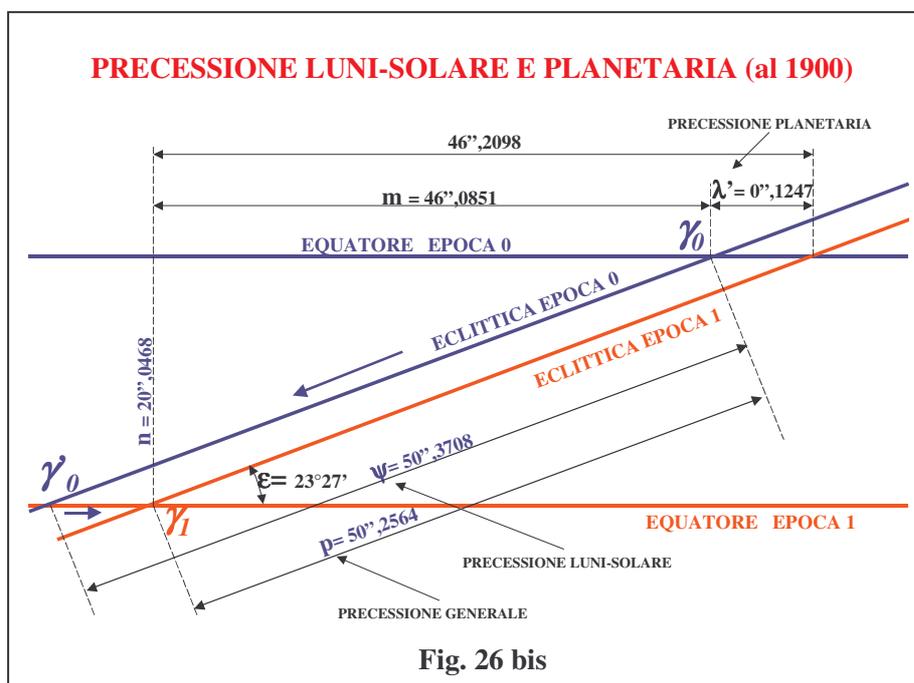
la precedente relazione diventa:

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha = \psi \cdot (\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \cdot \sin \alpha \cdot \tan \delta)$$

che è proprio la variazione annua in ascensione retta per effetto della **Precessione Luni Solare**.

Come è stato detto poco fa il periodo dovuto alla **Precessione Luni-Solare** sarebbe costante se il piano dell'**Eclittica** fosse fisso nello spazio. In realtà anche l'**Eclittica** si muove relativamente al piano equatoriale, movimento introdotto dalle perturbazioni che esercitano i **Pianeti**, non complanari all'**Eclittica**, sul moto orbitale terrestre. Tali perturbazioni determinano la cosiddetta **Precessione Planetaria** che porta l'**Equinozio** a muoversi in senso antiorario di circa **0,12 secondi d'arco all'anno** sull'**Equatore Celeste** come mostrato sia in **Figura 26 bis** che dalla relazione seguente (**Explanatory Supplement, 1961**) :

$$\lambda' = 0'',1247 - 0'',000188 \cdot (T - 1900,0) .$$



La **Precessione Planetaria** è anche responsabile della diminuzione del valore dell'obliquità dell'**Eclittica** come è possibile vedere verificando l'espressione di **Newcomb** data precedentemente. Combinando la **Precessione Luni-Solare** con quella **Planetaria** si ha un movimento globale dell'equinozio sull'**Eclittica** di **50,26** secondi d'arco all'anno denominato **Precessione Generale** che cresce ogni millennio di **0'',22** (secondi d'arco) come è possibile vedere dalla seguente relazione (**Explanatory Supplement, 1961**):

$$p = 50'',2564 + 0'',000222 \cdot (T - 1900,0)$$

Pertanto le formule di trasformazione delle coordinate equatoriali di una **Stella** da un'epoca all'altra ricavate precedentemente e dovute esclusivamente alla **Precessione Luni-Solare** vengono trasformate per effetto della **Precessione Planetaria** nelle formule della **Precessione Generale** nel seguente modo:

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha = \psi \cdot \cos \varepsilon - \lambda' + \psi \sin \varepsilon \cdot \sin \alpha \cdot \tan \delta$$

$$\Delta\delta = \delta_1 - \delta = \psi \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos \alpha$$

Come è possibile constatare sia da quest'ultima relazione che dalla **Figura 26 bis** la variazione annua nella declinazione risulta inalterata anche considerando la **Precessione Planetaria**.

Quindi raggruppando alcune costanti precessionali nel seguente modo (vedi **Figura 26 bis**):

$$m = \psi \cdot \cos \varepsilon - \lambda'$$

$$n = \psi \cdot \sin \varepsilon$$

le formule precedenti diventano:

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha = m + n \cdot \sin\alpha \cdot \tan\delta$$

$$\Delta\delta = \delta_1 - \delta = n \cdot \cos\alpha$$

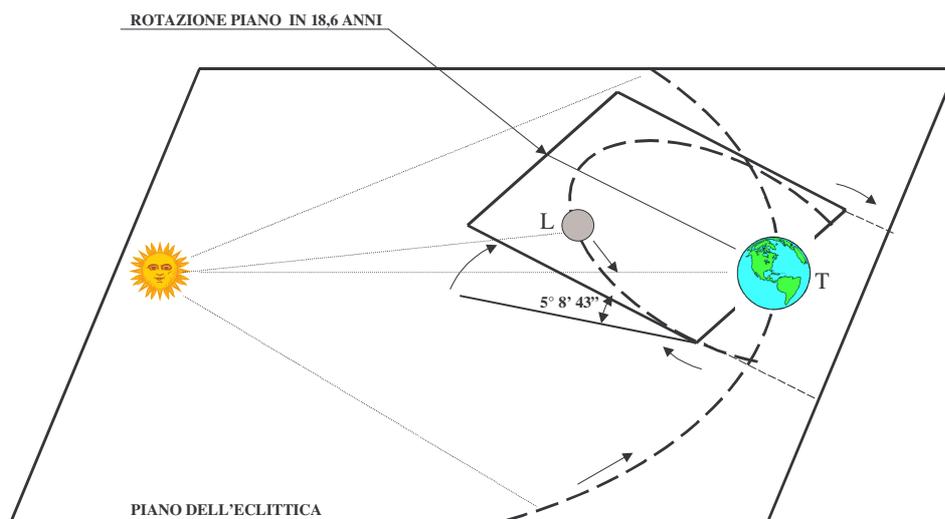
Queste formule, anche se non rigorose (per via delle approssimazioni sugli angoli), possono essere utili per sapere a quanto ammonta la variazione annua nelle coordinate equatoriali di una **Stella** per effetto della **Precessione Generale**. Supponendo congelato al **1900** lo spostamento annuo del **Punto Gamma**, questo compirebbe un giro completo sulla **Sfera Celeste** in un periodo di circa **25.780** anni che per convenzione è stato chiamato **Grande Anno** o più comunemente **Anno Platonico** in onore del filosofo **Platone** che, pur non conoscendo il fenomeno della **Precessione**, scoperto poi da **Ipparco** due secoli dopo, intuì che doveva esistere un **Grande Anno** a cui riferire il principio di ogni cosa. In realtà il progressivo aumento del valore precessionale fa variare il periodo **Platonico**, dai **27.380** anni (mezzo **Anno Platonico** prima del **1900**), ai **24.400** anni (mezzo **Anno Platonico** dopo).

Alle stesse formulazioni viste poc' anzi ottenute per via trigonometrica è possibile arrivarci per mezzo del calcolo vettoriale e matriciale. A questo scopo si legga l'**Appendice G** in cui viene affrontato il calcolo approssimativo dello spostamento delle coordinate apparenti delle stelle dovuto al fenomeno della **Precessione** per mezzo di questa tecnica di calcolo più moderna.

Resta ancora da esaminare l'influenza della **Luna** sul moto della **Terra**, prima di poter definire correttamente il **Giorno Siderale**.

Nutazione

Le ipotesi fatte prima supponevano un moto orbitale della **Luna** complanare al piano dell'**Eclittica**; in realtà la **Luna** rivolve intorno alla **Terra** su di un'orbita ellittica inclinata di **5° 8' 43"** rispetto a tale piano. In più il piano orbitale della **Luna** è dotato di un movimento di rotazione (opposto al movimento di rivoluzione lunare), con inclinazione costante rispetto all'**Eclittica**, che si compie in **18,6 anni**, (**Figura 27**).



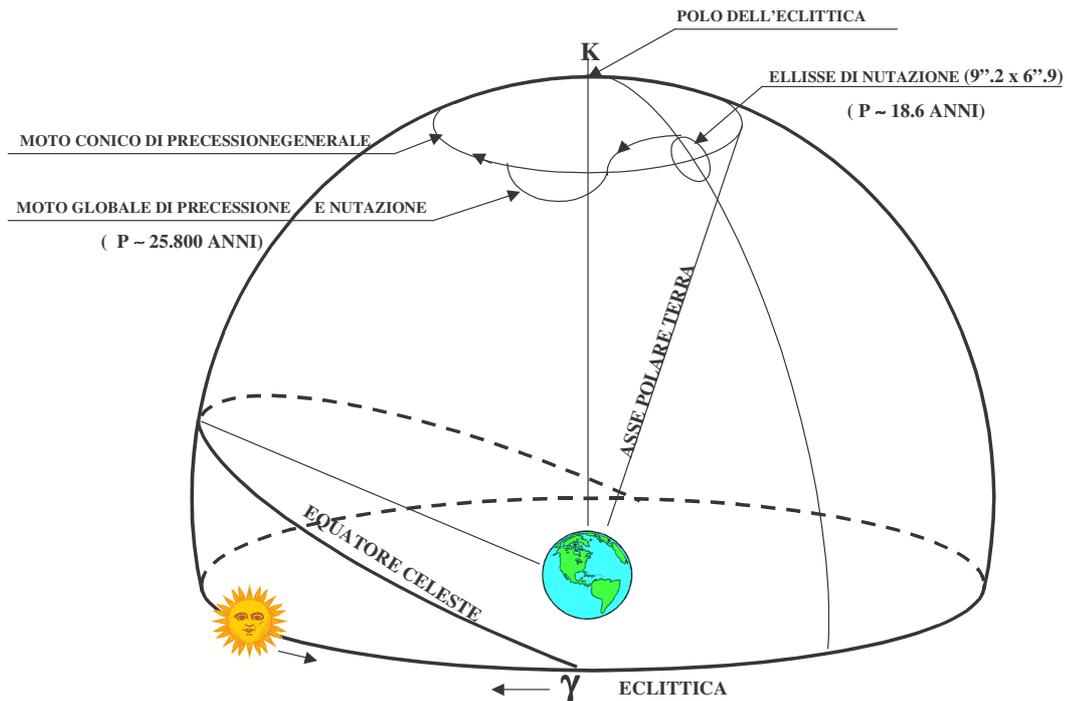
ROTAZIONE PIANO ORBITALE LUNA

Fig. 27

Pertanto, l'inclinazione dell'orbita lunare, abbinata alla rotazione del medesimo piano orbitale, porta come conseguenza che la **Luna**, trovandosi ora sopra ora sotto il piano dell'**Eclittica**, esercita assieme al **Sole** una forza che altera il movimento conico dell'asse polare terrestre, dovuto alla **Precessione Generale (Luni-Solare più Planetaria)** vista prima.

Ne consegue che si avrà sovrapposto al moto conico di **Precessione**, un moto ellittico il cui semiasse maggiore, rivolto verso il **Polo dell'Eclittica**, ammonta a **9",2** secondi d'arco, mentre il semiasse minore risulta di **6",9**.

Il moto globale spiraleggiante che ne risulta, di periodicità **18,6 anni** è chiamato **Nutazione** (vedi **Figura 28**).



PRECESSIONE GENERALE E NUTAZIONE

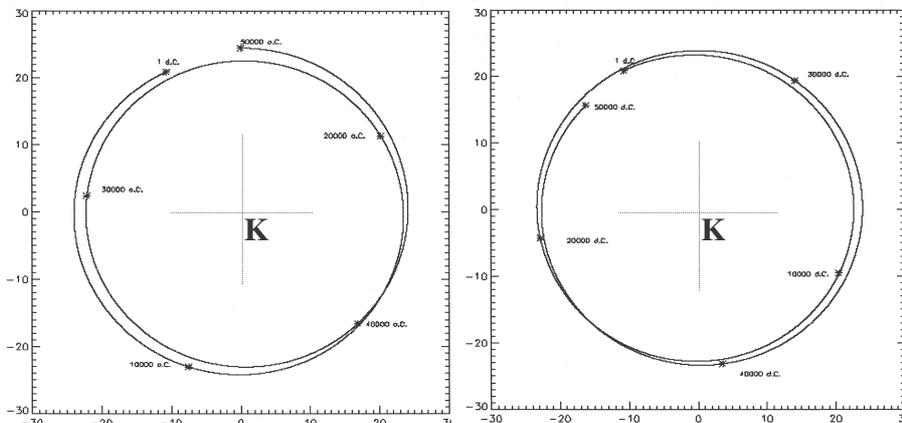
Fig. 28

Come abbiamo visto nelle righe precedenti, l'asse della **Terra**, prescindendo dalla **Nutazione**, descrive approssimativamente un cono intorno all'asse dell'**Eclittica** in un **Anno Platonico** con un semi-angolo al vertice oscillante tra i **22°,6** e i **24°,4** raggiungendo la massima o minima ampiezza consecutivamente in un periodo di **41.000 anni** come mostrato da recenti studi condotti da **A. Berger e F. Loutre, 1990** o da **J. Laskar, 1986**, come è possibile vedere dalla **Figura 29** in cui è sintetizzato il fenomeno della **Precessione** (moto conico) con l'oscillazione dell'obliquità dell'**Eclittica** per un periodo di tempo globale di **50.000 anni** avanti e indietro nel tempo rispetto all'anno **0 (1 a.C.)**.

Questo movimento precessionale modifica nel corso dei secoli la posizione delle **Stelle** in cielo al punto che la **Stella polare**, in Egitto, al tempo delle prime dinastie di faraoni (circa **2700 – 2500 a.C.**), non era l'attuale **α Polaris**, bensì la debole **Stella Thuban (α Draconis)**, mentre tra **11.400**

anni circa il posto della polare sarà preso dalla brillante **Vega (α Lyrae)** che si troverà però a circa **5°,5** dal vero **Polo Celeste** come è possibile dedurre dalla **Figura 30**.

OSCILLAZIONE OBLIQUITA' ECLITTICA



IL POLO CELESTE DESCRIVE UN CONO IN 25.800 ANNI INTORNO A (K)

L'AMPIEZZA DEL CONO VARIA CON UN PERIODO DI 41.000 ANNI

MINIMA OBLIQUITA' = 22°.6 MASSIMA OBLIQUITA' = 24°.4

Fig. 29

Ora che abbiamo analizzato in dettaglio le motivazioni per cui si verifica il fenomeno della **Precessione Generale**, riportiamo qui di seguito (senza dimostrazione) la formulazione rigorosa presente nell' **Explanatory Supplement, 1992** che consente di "precessare" le coordinate equatoriali (α, δ) di una **Stella** da un'epoca all'altra.

SPOSTAMENTO DELLA POLARE NEL CORSO DEI SECOLI

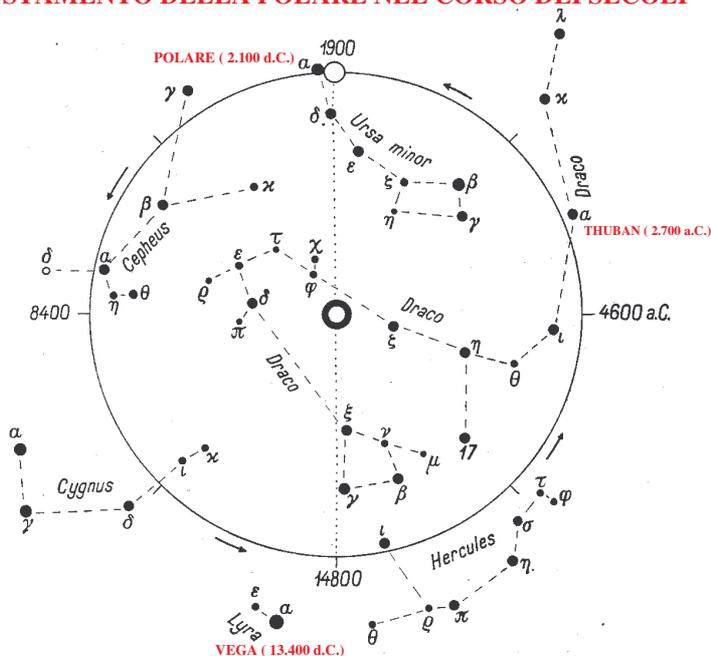
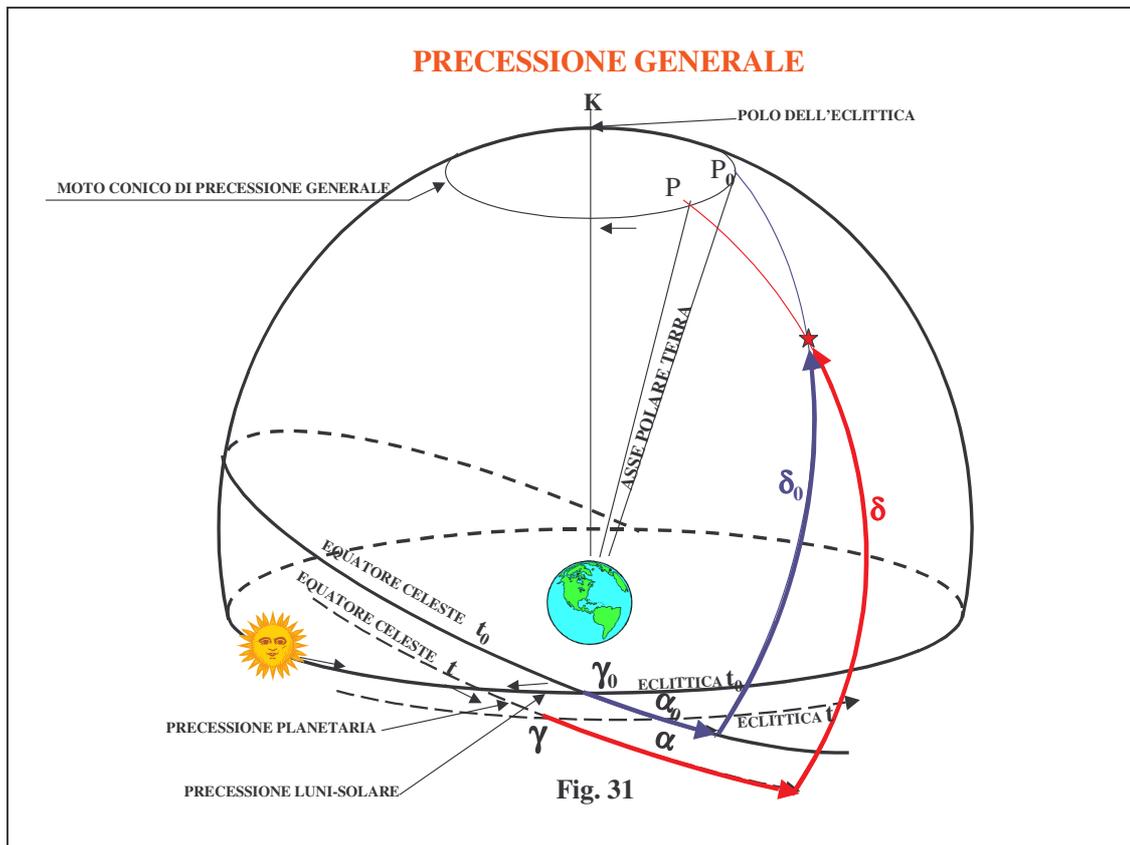


Fig. 30



Se conosciamo le coordinate equatoriali α_0 e δ_0 di una **Stella** all'epoca iniziale $t_0 = J2000,0$, le coordinate equatoriali α e δ ad una certa epoca t della stessa **Stella** saranno (vedi **Figura 31**):

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - z_A) \cdot \cos(\delta) &= \sin(\alpha_0 + \zeta_A) \cdot \cos(\delta_0) \\ \cos(\alpha - z_A) \cdot \cos(\delta) &= \cos(\alpha_0 + \zeta_A) \cdot \cos(\theta_A) \cdot \cos(\delta_0) - \sin(\theta_A) \cdot \sin(\delta_0) \\ \sin(\delta) &= \cos(\alpha_0 + \zeta_A) \cdot \sin(\theta_A) \cdot \cos(\delta_0) + \cos(\theta_A) \cdot \sin(\delta_0) \end{aligned}$$

oppure avendo le coordinate α e δ di una **Stella** ad una certa epoca t se si vogliono le coordinate equatoriali α_0 e δ_0 all'epoca iniziale $t_0 = J2000,0$ le formule diventano:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_0 + \zeta_A) \cdot \cos(\delta_0) &= \sin(\alpha - \zeta_A) \cdot \cos(\delta) \\ \cos(\alpha_0 + \zeta_A) \cdot \cos(\delta_0) &= \cos(\alpha - \zeta_A) \cdot \cos(\theta_A) \cdot \cos(\delta) + \sin(\theta_A) \cdot \sin(\delta) \\ \sin(\delta_0) &= -\cos(\alpha - \zeta_A) \cdot \sin(\theta_A) \cdot \cos(\delta) + \cos(\theta_A) \cdot \sin(\delta) \end{aligned}$$

Per riduzioni rispetto all'equinozio ed epoca standard **J2000,0** (posizione del punto Gamma al 1° Gennaio 2000 alle ore 12 di TE: vedi più avanti) le quantità ζ_A , z_A , θ_A assumono i seguenti valori:

$$\begin{aligned} \zeta_A &= 0^\circ,6406161 \cdot T + 0^\circ,0000839 \cdot T^2 + 0^\circ,0000050 \cdot T^3 \\ z_A &= 0^\circ,6406161 \cdot T + 0^\circ,0003041 \cdot T^2 + 0^\circ,0000051 \cdot T^3 \\ \theta_A &= 0^\circ,5567530 \cdot T + 0^\circ,0001185 \cdot T^2 + 0^\circ,0000116 \cdot T^3 \end{aligned}$$

dove $T=(t-2000,0)/100$.

Per una trattazione più dettagliata del calcolo rigoroso della **Precessione Generale** eseguita per mezzo del calcolo vettoriale e delle matrici di rotazione si legga l'**Appendice H**

Fino a questo punto abbiamo parlato del moto in cielo dell'asse di rotazione terrestre mentre implicitamente abbiamo supposto fisso il **Polo dell'Eclittica**. In realtà anche questo asse non è fisso in cielo. Infatti, come è noto, il nostro sistema solare è costituito da un certo numero di **Pianeti** che orbitano su piani aventi una certa inclinazione rispetto al piano dell'**Eclittica** sul quale si muove la nostra **Terra**. Orbene l'azione gravitazionale degli altri **Pianeti**, in particolare i più massicci, come **Giove e Saturno**, trovandosi periodicamente ora sopra ora sotto l'**Eclittica** tendono a far oscillare il suddetto piano, e di conseguenza il suo asse, rispetto ad un piano medio detto **Piano Invariabile o Invariante** in maniera casuale spiraleggiante (**Figura 32**) in un periodo complessivo di circa **100.000 anni** come è possibile vedere dalla **Figura 33** in cui sono simulati diversi periodi (**Muller R.A. et al.,1997**). In particolare il **Polo del Piano Invariante** ha al giorno d'oggi le seguenti coordinate equatoriali riferite all'equinozio **J2000,0** :

$$\alpha = 273^{\circ},85 = 18^h 15^m 24^s$$

$$\delta = 66^{\circ} 59' 24''$$

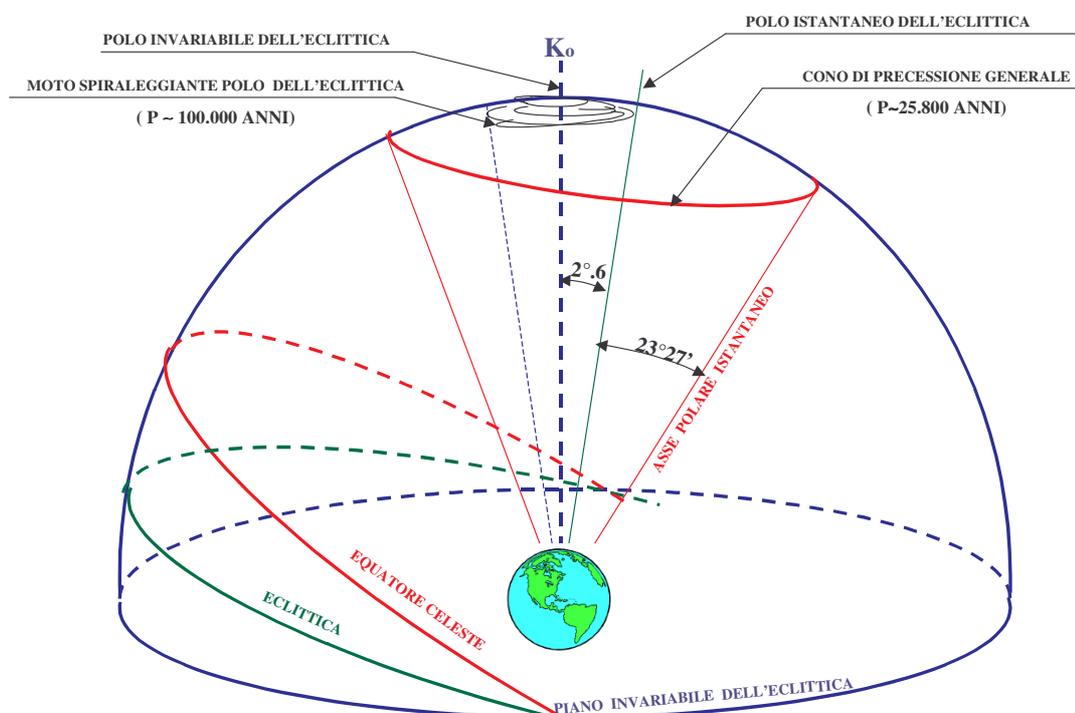
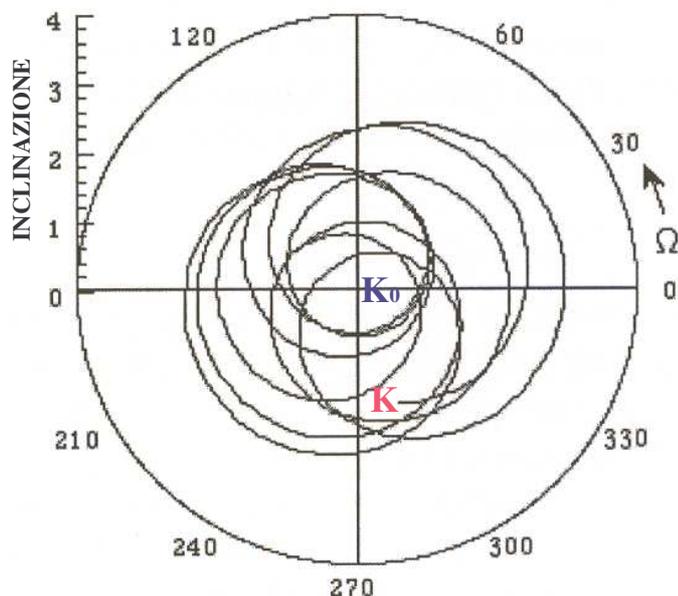


Fig. 32

MOTO POLO ECLITTICA INTORNO AL POLO INVARIANTE



MOTO DI (K) INTORNO A (K₀) CON PERIODO DI CIRCA 100.000 ANNI
Fig. 33

Inoltre, il suddetto **Polo Invariante** dista ora dal **Polo dell'Eclittica** di circa **1°₅₈**, mentre **30.000 anni fa** distava di **circa 2°₆**. Attualmente questo valore sta decrescendo e si prevede che tra **20.000 anni** raggiungerà il valor minimo di **0°₈**. L'asse di questo piano, approssimativamente parallelo all'asse perpendicolare all'orbita di **Giove**, è quello secondo cui la somma dei momenti angolari di tutti i **Pianeti** risulta massima e quindi si può ragionevolmente supporlo fisso in cielo per lunghissimi periodi di tempo (Cecchini,1969).

Vogliamo infine ricordare che il moto apparente del **Sole**, che come è stato detto precedentemente, avviene sul piano dell'**Eclittica**, nella realtà si discosta da questo piano di **± 1''₂** rispetto ad una **Latitudine Eclittica Media** nulla ($\beta = 0^\circ$) con una periodicità di circa un mese. La ragione di questa oscillazione dipende dal fatto che è solo il baricentro del sistema **Terra-Luna** a muoversi sul piano dell'**Eclittica**, per cui la **Terra** (e anche la **Luna**) trovandosi alternativamente ogni **mezzo mese sinodico Lunare** (**mese sinodico = 29,530 giorni = periodo tra due noviluni**) nei punti di massima distanza dall'**Eclittica**, vede la posizione del **Sole** trovarsi spostata rispetto a questo piano della piccola quantità sopra citata, che ai fini pratici può essere trascurata.

A questo punto, dopo aver fatto una panoramica dei principali spostamenti spaziali dell'asse di rotazione terrestre abbiamo tutti gli elementi per poter definire il **Giorno Siderale** ed il suo tempo associato.

Se consideriamo lo spostamento dell'equinozio ad esempio quello di primavera, detto anche **Punto Gamma** (Υ) o **d'Ariete**, dovuto esclusivamente al moto di **Precessione Generale**, abbiamo un movimento di questo rispetto allo scenario di **Stelle** fisse in senso opposto alla rotazione terrestre, per cui osservando due culminazioni superiori consecutive in meridiano di tale punto, troveremo un periodo più corto di circa **8 millesimi di secondo** rispetto al **Giorno Sidereo** o rotazionale precedentemente definito. Questa unità di tempo viene definita **Giorno Siderale Medio** (vedi **Figura 34**).

GIORNO SIDERALE

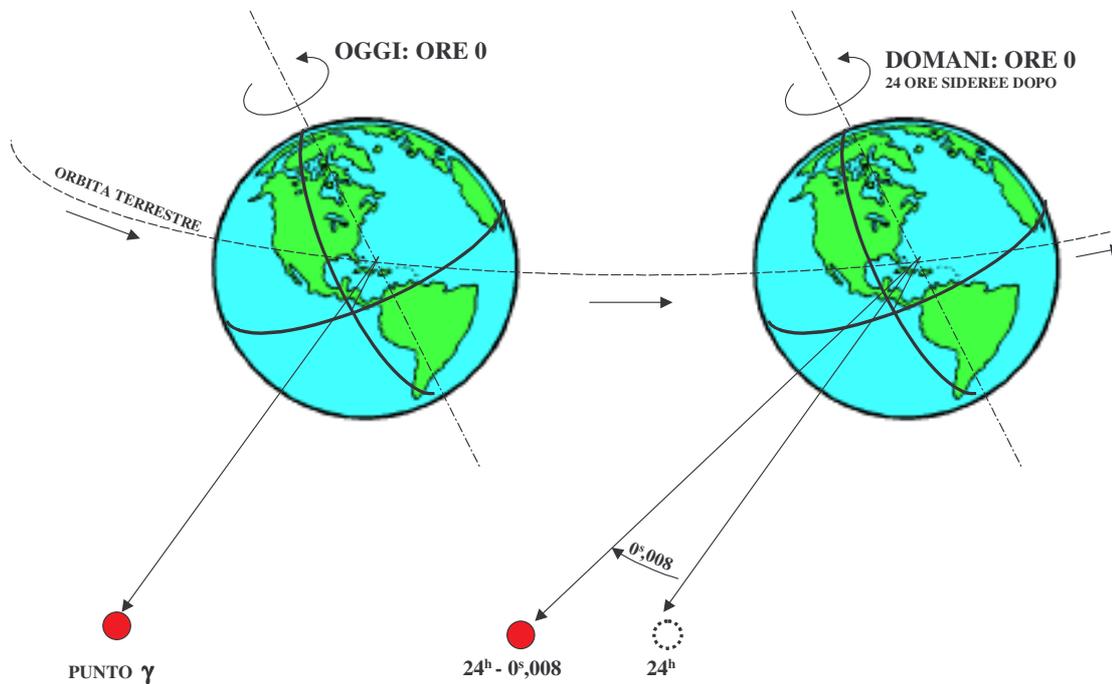


Fig. 34

Causa la **Nutazione** il **Punto Gamma** oscilla attorno ad una posizione media di una quantità che può superare il secondo di tempo, per cui osservando due culminazioni superiori consecutive dell'**Equinozio Vero**, registreremmo un **Giorno Siderale Vero** variabile da un giorno all'altro.

A questo proposito occorre ricordare che i pendoli e gli orologi a **Tempo Siderale** usati in astronomia, sono regolati in relazione al moto apparente dell'**Equinozio Medio**, che come è noto è costante per intervalli di tempo non eccessivamente lunghi.

Pertanto un **Giorno Siderale Medio** durerà esattamente **24 ore o 86.400 secondi di Tempo Siderale**. Si ricorda ancora che il **Tempo Siderale** è definito come l'angolo orario compreso tra il meridiano dell'osservatore e l'**Equinozio Medio di Primavera**, contato positivamente verso Ovest sull'**Equatore Celeste** in ore, minuti e secondi di **Tempo Siderale**. E' evidente che quando il **Punto Gamma Medio** transita sul meridiano dell'osservatore, l'orologio siderale segna le ore **0^h 00^m 00^s**. Da questa constatazione segue che per ogni luogo della **Terra** esiste un **Tempo Siderale Locale** diverso, poiché diversi sono gli istanti di passaggio nei rispettivi meridiani dell'**Equinozio Medio**.

Un'altra osservazione è che disponendo di un orologio siderale preciso, osserveremo il passaggio in meridiano del **Punto Gamma Vero**, o poco prima o poco dopo le ore zero di **Tempo Siderale**, causa la **Nutazione** che ne anticipa o ritarda il passaggio di circa un secondo al massimo.

La differenza tra il **Tempo Siderale Vero** e il **Tempo Siderale Medio** viene chiamata **Equazione degli Equinozi**, ed è tabulata giorno per giorno sulle **Effemeridi Astronomiche**.

Dopo aver trattato sia le irregolarità del moto di rotazione della **Terra** (**secolari, periodiche e accidentali**) che le variazioni spaziali del suo asse dovute ai fenomeni di **Precessione e Nutazione** parliamo ora di un ultimo moto dell'asse di rotazione terrestre, detto **Polodia**, che modifica il periodo

di rotazione terrestre se confrontato con il moto apparente delle **Stelle**. Fino alla metà del XX secolo si era constatata una grande regolarità nel passaggio delle **Stelle** in meridiano per cui si assunse che la **Terra** dovesse avere un moto di rotazione rigorosamente costante nel tempo. Di conseguenza si scelse il **Giorno Siderale Medio** come unità di tempo invariabile, al punto che si utilizzò il transito delle **Stelle** in meridiano per regolare gli orologi e i pendoli di quell'epoca che, ovviamente, erano molto meno precisi e regolari di quanto lo fosse la rotazione terrestre. Con il passare degli anni e con l'avvento di orologi sempre più precisi ci si rese conto che la **Terra** non possedeva un moto di rotazione così regolare come lo si supposeva nel passato per cui si prese in considerazione il periodo di rivoluzione della **Terra** intorno al **Sole** in un anno, che si dimostrò decisamente più stabile del periodo di rotazione terrestre. Al giorno d'oggi sappiamo che anche questa **Scala di Tempo** non è rigorosamente costante se paragonata a quella fornita dagli orologi atomici.

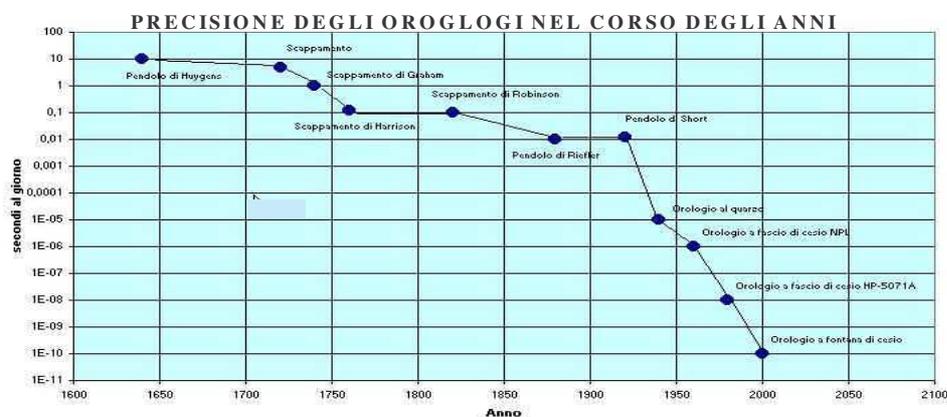


Fig. 35

A titolo di esempio, nella **Figura 35** possiamo vedere come nel **1650** lo scarto giornaliero di un pendolo fosse di circa **10 secondi**, mentre al giorno d'oggi con i più moderni orologi atomici a fontana di Cesio tali scarti si sono ridotti a un **decimiliardesimo di secondo o in altri termini ad 1 secondo ogni 3 milioni di anni**.

Tuttavia grazie all'avvento di questi orologi ultra precisi si è avuto un mezzo per verificare le anomalie del moto di rotazione terrestre dedotte dall'osservazione del moto apparente degli astri. Queste anomalie hanno permesso di comprendere che la **Terra** non è un corpo sferico né tanto meno rigido come più volte detto.

Polodia

Eulero verso il **1765** effettuò degli studi teorici che dimostrarono come la rotazione della **Terra** non avvenisse sempre secondo l'asse di figura del geoide (chiamato anche asse di massimo momento di inerzia), bensì attorno ad un asse di rotazione istantaneo, il quale a sua volta ruotava intorno a quello di figura descrivendo un piccolo cerchio in un periodo di **305 giorni**. Solo nel corso del XIX secolo venne verificato sperimentalmente il **Moto del Polo** ipotizzato da **Eulero**. L'ipotesi da cui si partì era la seguente: se il **polo istantaneo** si muove sulla superficie terrestre e se la crosta della **Terra** tra un luogo di osservazione e il **polo istantaneo** non subisce deformazioni, in quel luogo si dovrebbe osservare una variazione ciclica dell'altezza sull'orizzonte della **Stella** polare nel periodo ipotizzato

da **Eulero** e di conseguenza osservare una variazione della latitudine del luogo. Questo fenomeno venne effettivamente verificato durante una campagna di osservazioni per la determinazione della latitudine delle località di **Berlino**, **Greenwich**, **San Pietroburgo** e **Washington**. Infatti nel **1888 Kustner** annunciò che la latitudine di **Berlino** subiva delle fluttuazioni nel corso di un anno di circa **0,2 secondi d'arco**. Successivamente **Chandler** mise in evidenza due componenti sovrapposte nella variazione del **Moto del Polo** e quindi delle latitudini; una piccola, ellittica, con periodo di **un anno** e l'altra, circolare, più grande, di **435 giorni**. Il termine annuale, con un'ampiezza di circa **6 metri**, sembra sia dovuto allo spostamento stagionale delle enormi masse d'aria che migrano da un emisfero all'altro le quali sono responsabili anche delle variazioni stagionali del moto rotazionale. Il secondo termine è stato invece investigato da **Newcomb** il quale dedusse che la differenza tra il periodo euleriano di **305 giorni** e quello di **435 giorni** effettivamente osservato dipendesse dal fatto che la crosta terrestre non è perfettamente rigida, ma ha una elasticità paragonabile a quella dell'acciaio. Il moto finale del **polo istantaneo** di rotazione, per effetto di queste due componenti, resta comunque sempre confinato in un cerchio irregolare spiraleggiante di circa **15 metri** di diametro chiamato appunto **Polodia** (**F. Mignard, 1981**).

Con il passar del tempo si è visto che il periodo di **435 giorni** è variabile e oscilla tra **415 e 445 giorni**. Questa oscillazione ancora oggi di dubbia origine sembra dovuta a fattori sismologici, meteorologici e altri fenomeni di differente natura.

In **Figura 36** è sintetizzata la posizione del **polo istantaneo** in 2 epoche differenti dalle quali è possibile vedere come la latitudine, ma anche la longitudine, di due località come **Greenwich** e **Torino** varino nel tempo, mentre in **Figura 37** è rappresentata, con punti intervallati di 5 giorni, la **Polodia** osservata dal **1996 al 2000,5**.

MOTO DEL POLO... (POLODIA)

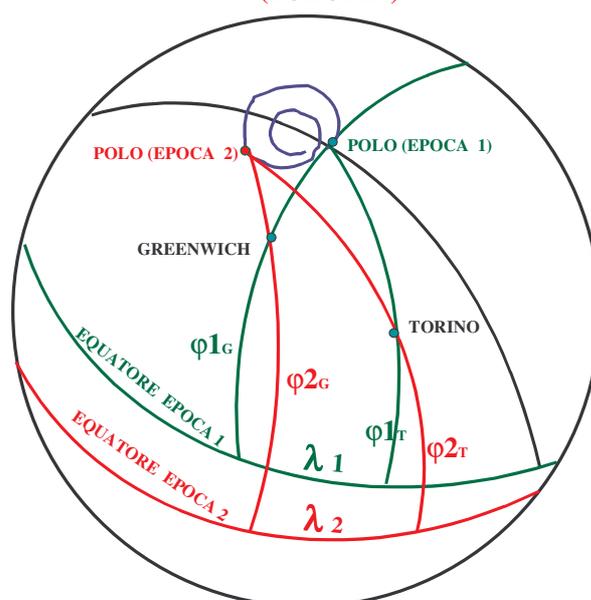


Fig. 36

La linea continua invece rappresenta la posizione del **Polo Medio** ottenuto come valor medio delle coordinate x e y di **6 anni** a partire dal **1890** fino al **2000**. Come si vede dalla **Figura 37** l'andamento del **Polo Medio** nel corso degli anni pur non essendo perfettamente rettilineo mostra tuttavia una inclinazione di circa **80°** in direzione **Ovest** verso il Canada e che corrisponde sulla **Terra** ad uno spostamento di circa **10 cm** all'anno.

In realtà questo spostamento non sembra attribuibile ad un effettivo spostamento del polo medio sulla crosta terrestre, bensì ad un avvicinamento delle placche continentali .

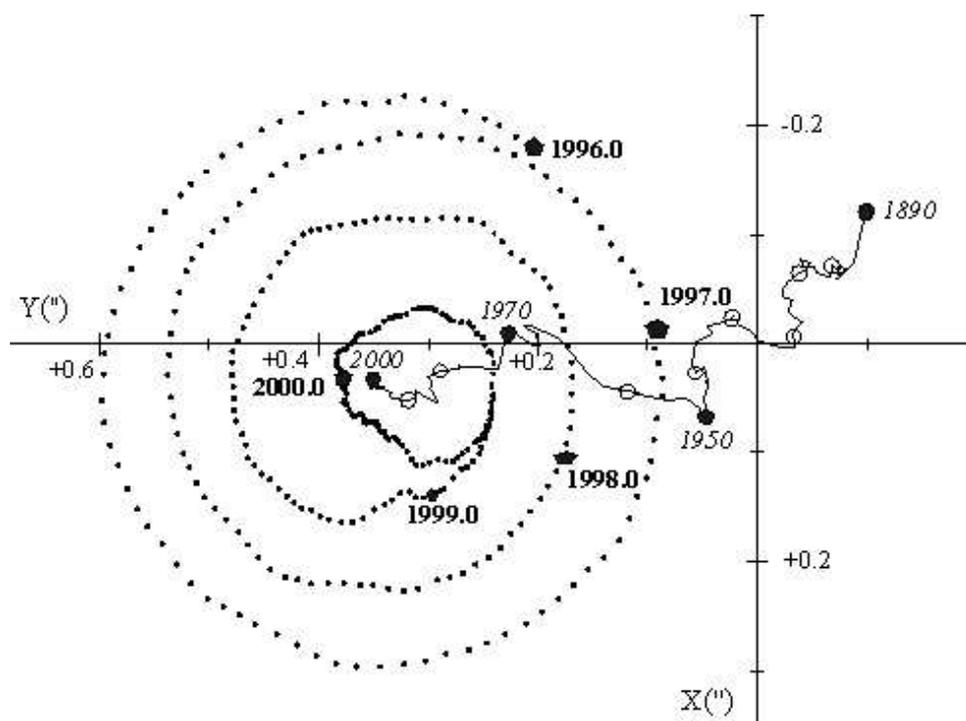


Fig. 37

Comunque sia il fenomeno fin qui descritto è riferito soltanto allo spostamento dell'asse istantaneo di rotazione sulla superficie terrestre rispetto all'asse polare medio che, in linea di principio, dovrebbe essere prossimo all'asse polare d'inerzia o di figura (corrispondente all'asse minore del geoido).

In realtà se riferiamo l'orientamento dell'asse terrestre nello spazio anziché sulla superficie terrestre le cose si complicano, come pure si complicano i moti a seconda che si consideri la **Terra** rigida o elastica o soggetta a forze esterne o meno.

Per comprendere tutti (o quasi) i possibili spostamenti del Polo facciamo riferimento alla **Figura 38**. Supponiamo per il momento che la **Terra** sia rappresentabile come un **ellissoide di rotazione rigido** ruotante intorno all'asse minore CF di **Figura 38** e che **non sia soggetto a forze esterne** come quelle del **Sole della Luna e dei Pianeti** e a **forze interne**. Ebbene, in questo caso, la **Terra** ruoterebbe intorno all'asse di figura CF , detto anche **Asse di Massimo Momento d'Inerzia**, che in questo particolare caso coinciderebbe con l'**Asse del Momento Angolare**. Questo asse per definizione è un **asse stabile di rotazione fisso in cielo**.

Tuttavia se la **Terra**, **sempre rigida e non soggetta a forze esterne ed interne**, avesse per qualche ragione un asse istantaneo di rotazione non coincidente con quello di figura F (come effettivamente accade nella realtà) si creerebbe una coppia di forze sui rigonfiamenti equatoriali che tenderebbe a

spostare l'asse istantaneo di rotazione sia sulla superficie terrestre che nello spazio. Nello spazio si avrebbe un moto di **Precessione** dell'asse istantaneo IRP_1 e dell'asse di Figura F intorno all'**Asse di Momento Angolare CEP_1** , che essendo uniforme, individuerrebbe una posizione fissa nello spazio. Il risultato di questi spostamenti si tradurrebbe in due moti conici nello spazio e concentrici di ampiezza $(IRP_1 - CEP_1) = 0'',00098$ e $(F - CEP_1) = 0'',2999$. Sulla superficie terrestre invece si avrebbe un rotolamento senza strisciamento del cono piccolo $(IRP_1 - CEP_1)$ detto **Erpoloide** sul cono più grande $(IRP_1 - F)$ in senso antiorario. In questo caso si avrebbe l'asse F fisso sulla **Terra**, mentre l'asse IRP_1 gli ruoterebbe intorno con un'ampiezza di **circa 7 metri** in un periodo teorico di **305** giorni. Questo moto chiamato **Nutazione Libera Euleriana** come accennato precedentemente fu scoperto da **Eulero**.

Se questa **Terra**, supposta per il momento **ancora rigida e priva di forze interne**, la si ponesse nell'**orbita attuale** e quindi soggetta alle perturbazioni indotte dai campi gravitazionali del **Sole della Luna e dei Pianeti** sui rigonfiamenti equatoriali, si avrebbe un movimento generale conico dell'**Asse del Momento Angolare o Celestial Ephemeris Pole (CEP)** (che in questo caso non coincide con quello di figura) rispetto al polo dell'**Eclittica K** in **1 Anno Platonico** causando il fenomeno della **Precessione Generale** visto in precedenza (N. Capitaine, 2000). A questo moto si sovrapporrebbe un moto ellittico di minore entità chiamato **Nutazione** indotto dalle perturbazioni del moto della **Luna** con periodo di circa **18,6** anni, anch'esso discusso precedentemente. Tuttavia, la composizione dei moti di rotazione attorno al proprio asse istantaneo in un **Giorno Siderale** e di questo intorno al polo dell'**Eclittica** in circa **26.000** anni dà origine ad un asse fisso nello spazio cioè all'**Asse del Momento Angolare** tale per cui l'**Asse Istantaneo di Rotazione** gli ruoti intorno in un **Giorno Siderale** ad una distanza angolare di circa **0'',025**. Questo movimento fa sì che l'**obliquità dell'Eclittica** oscilli giornalmente della quantità evanescente di **0'',025** rispetto al **CEP** . Sulla **Terra** questo moto si identifica con uno spostamento circolare dell'asse istantaneo di rotazione IRP_0 rispetto ad un asse medio di rotazione che si muove sul cerchio previsto dalla **Nutazione Libera Euleriana CEP_0** . In sostanza l'asse IRP_0 descrive un cerchio di circa **62 cm** di raggio in un **Giorno Siderale** sovrapposto al moto circolare di CEP_0 rispetto a F in **305** giorni con una semi ampiezza sul terreno di **circa 7 metri**.

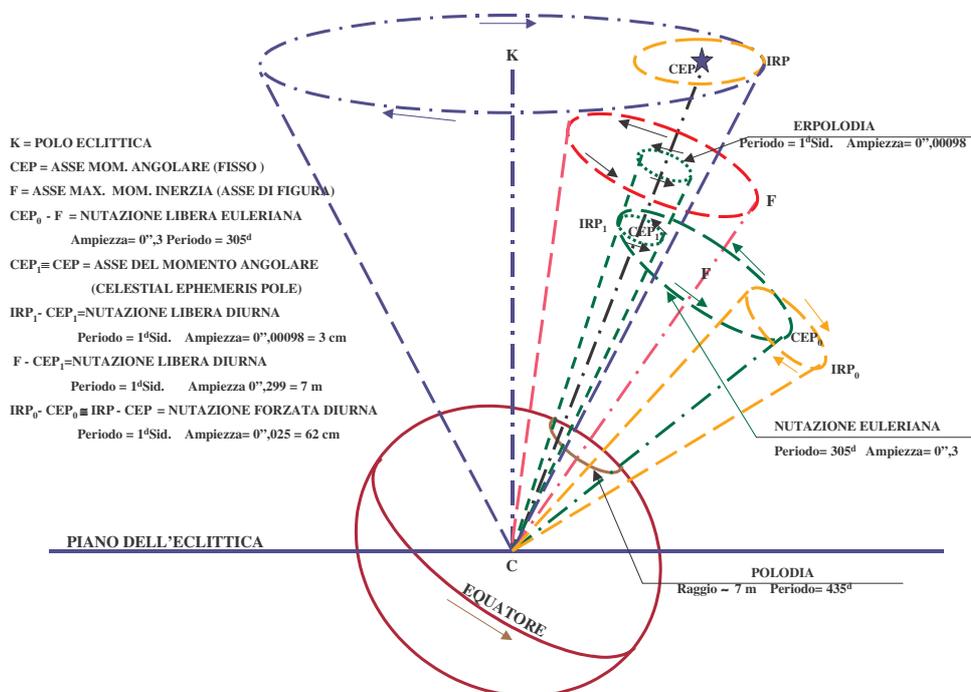


Fig. 38

Se alla fine consideriamo la **Terra come un corpo non sferico, deformabile** (cioè con un certo grado di elasticità) ed in più **soggetto alle perturbazioni gravitazionali del Sole della Luna e dei Pianeti**, i moti circolari descritti precedentemente subiscono delle modifiche nel senso che la **Nutazione libera Euleriana di 305 giorni** diventa la **Nutazione forzata di Chandler**, spiraleggiante e non più circolare di **435 giorni**, accennata in precedenza, mentre la **Nutazione Diurna Forzata** aumenta la semiampiezza dell'asse istantaneo di rotazione dall'asse del **Momento Angolare istantaneo di rotazione** da circa **2 cm**, nel caso di una **Terra rigida**, a circa **21 cm** nel caso di una **Terra deformabile** (P. Mc Clure,1973).

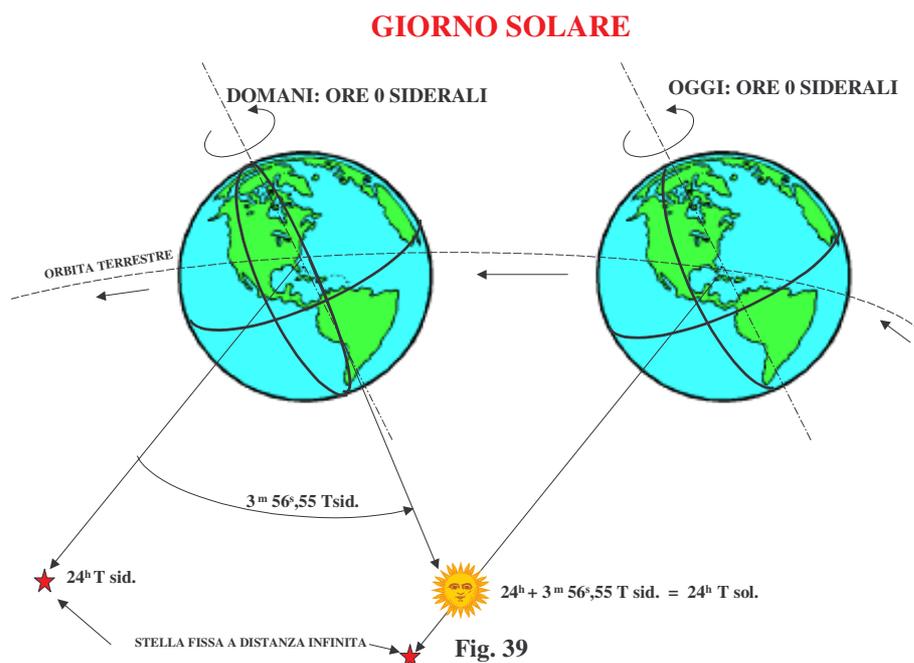
Come è stato accennato precedentemente la **Terra** mostra un periodo di rotazione attorno al proprio asse in 24 ore siderali. Tuttavia grazie all'avvento degli orologi atomici sono state messe in evidenza delle variazioni sistematiche e accidentali del moto di rotazione molto piccole, che al massimo toccano il millesimo di secondo al giorno. Poiché, come abbiamo visto, gli orologi atomici al Cesio forniscono una precisione dell'ordine del **decimiliardesimo** di secondo si è ora in grado di sapere quanti secondi e frazioni di secondo contiene il giorno nel corso dell'anno e dal confronto di questi risalire alle irregolarità del moto di rotazione terrestre.

Giorno Solare

Se il **Giorno Siderale** è il tempo legato al passaggio consecutivo in meridiano del **Punto Gamma** o impropriamente delle **Stelle**, il **Giorno Solare** sarà un tempo legato evidentemente al moto apparente del **Sole** in cielo. Anche qui bisogna affrontare il problema per gradi.

Come abbiamo detto, la **Terra** oltre che ruotare assialmente, rivolge intorno al **Sole**, pertanto quando questa avrà compiuto un giro completo intorno al proprio asse, non occuperà più la stessa posizione orbitale che aveva all'inizio del giro.

Ne segue quindi che, se un punto sulla **Terra** prima del giro era orientato verso il **Sole**, dopo un giro di 360° lo stesso punto non sarà più orientato, ma dovrà ruotare ancora di una frazione per riottenere l'allineamento (vedi **Figura 39**).



Esprimendo il concetto in altra maniera, possiamo dire che il solito osservatore posto sulla **Terra** se avesse la possibilità di osservare contemporaneamente il **Sole** e le **Stelle**, vedrebbe oltre al moto apparente di tutto il sistema (**Sole + Stelle**) da **Est** verso **Ovest**, il moto del **Sole** rispetto alle **Stelle** in senso opposto al movimento apparente di queste.

Pertanto, se ad un certo istante il **Sole** e una **Stella** passano contemporaneamente in meridiano, al prossimo passaggio si noterà che la **Stella** sarà in anticipo sul **Sole** mediamente di **circa 4 minuti**.

Occorre però precisare un punto; poiché la **Terra** rivolge attorno al **Sole** con velocità diverse a seconda del punto dell'orbita in cui si trova, anche la velocità apparente del **Sole** osservata dalla **Terra** è variabile. Inoltre anche supponendo costante il suo moto sull'**Eclittica**, la proiezione di questo **sull'Equatore Celeste** è variabile. Avendo quindi la necessità di una unità di tempo costante, legata ad un astro che si muove apparentemente **sull'Equatore Celeste** a velocità uniforme, ne segue che il nostro **Sole** non ha le caratteristiche di cui sopra, in quanto il tempo intercorso tra due passaggi in meridiano di questo ci fornisce una unità di tempo che è variabile di giorno in giorno, chiamata **Giorno Solare Vero**.

Per avere un tempo che sia legato ad un **Sole** che si muove in maniera costante, si aggira l'ostacolo considerando due corpi fittizi che confluiscono in un **Sole Medio** il quale ha le caratteristiche richieste.

Il primo passo è quello di considerare un **Sole Fittizio** che si muove sul piano dell'**Eclittica** a velocità costante (il che implica un'orbita circolare), in modo che la sua posizione coincida con quella del **Sole Vero** al **Perielio** e all' **Afelio**; successivamente si considera un secondo **Sole Fittizio** che si muove sull'**Equatore Celeste** a velocità costante, la cui posizione coincida con quella del **Sole Vero** agli Equinozi di Primavera e d'Autunno e ai Solstizi d'Estate e d'Inverno). Quest'ultimo **Sole** viene chiamato **Sole Medio**.

L'unità di tempo legata a due culminazioni superiori consecutive di questo **Sole** è chiamata **Giorno Solare Medio**.

Esso è costante per definizione ed è suddiviso in **24 ore o 86.400 secondi di Tempo Solare Medio**.

Anche qui è interessante notare come un osservatore constaterrebbe il passaggio in meridiano del **Sole Medio** (chiaramente invisibile perché fittizio) sempre alle **ore zero di Tempo Solare Medio**, mentre il passaggio del **Sole Vero** avviene a seconda dei periodi dell'anno o prima o dopo le ore zero, discostandosi da questo valore di circa **± un quarto d'ora**, come è possibile constatare dalla **Figura 40**. Questa figura altro non è che la rappresentazione grafica di quella che comunemente viene definita **Equazione del Tempo**.

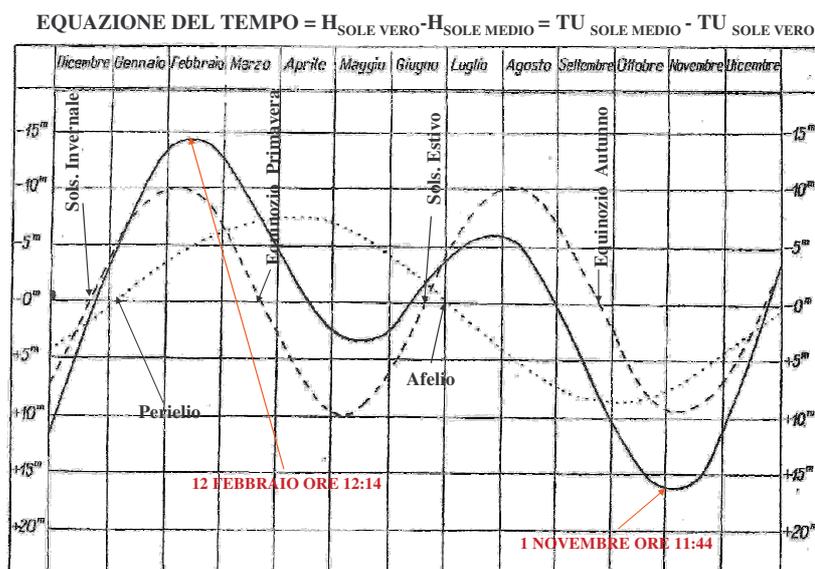


Fig. 40

Tale Equazione risulta dalla differenza fra l'angolo orario del **Sole Vero** meno l'angolo orario del **Sole Medio**, presa con il segno positivo quando il **Sole Vero** transita prima di quello medio, o negativo nel caso contrario.

Una verifica sperimentale **dell'Equazione del Tempo** è possibile averla osservando il **Sole**, ad esempio, dal meridiano di **Greenwich**, nel corso di un anno. In questo caso ci rendiamo facilmente conto che tutti gli anni intorno al **12 di Febbraio** il **Sole** culmina superiormente in meridiano alle **ore 12:14 locali**, mentre intorno al **1° di novembre** transita alle **ore 11:44**.

Un'altra verifica sulla variabilità della durata del **Giorno Vero** nel corso dell'anno la si può ottenere cronometrando con un orologio la differenza di tempo tra un giorno e l'altro tra due passaggi consecutivi del **Sole Vero** in meridiano come mostrato nella **Figura 41**. Come si può notare le variazioni massime giornaliere nel corso di un anno ammontano a circa mezzo minuto in più o in meno rispetto alle convenzionali 24 ore.

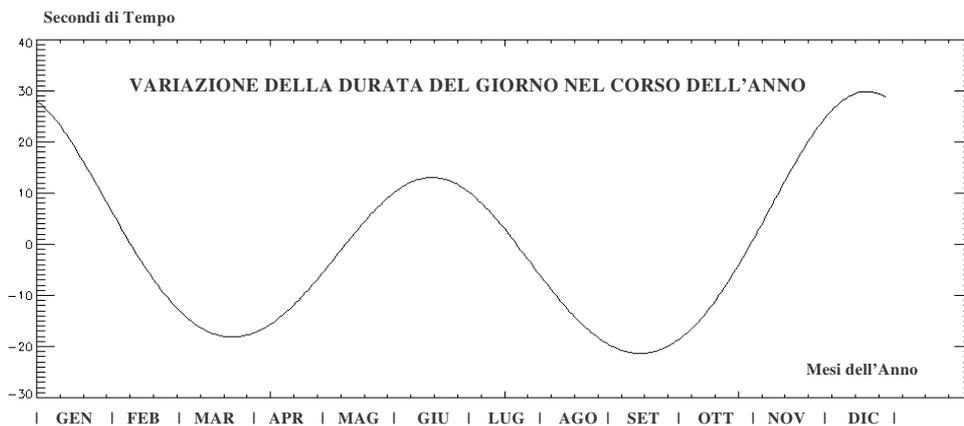


Fig. 41

Abbiamo detto prima che il **Giorno Siderale Medio** è suddiviso in 24 ore esatte, come pure il **Giorno Solare Medio**. Tuttavia la durata di un'ora siderale è più corta di quella solare corrispondente, poiché l'**Equinozio Medio** si muove più rapidamente del **Sole Medio** sulla volta **Celeste**.

In altre parole, l'**Equinozio** o impropriamente le **Stelle** impiegano **23^h 56^m 04^s,09053** di **Tempo Solare Medio** per ritornare allo stesso punto del Meridiano, mentre il **Sole Medio** impiega **24^h 03^m 56^s,55537** di **Tempo Siderale Medio** per fare lo stesso percorso.

Nel passaggio da intervalli di ore solari a intervalli siderali alle volte è utile utilizzare il coefficiente:

$$K_T = \frac{24^h}{23^h 56^m 04^s,09053} = 1,002738$$

nel senso che :

$$\Delta T_{\text{Siderale}} = K_T \cdot \Delta T_{\text{Solare}} = 1,002738 \cdot \Delta T_{\text{Solare}}$$

Ore di Insolazione, Crepuscolo Civile, Nautico e Astronomico

E' noto a tutti che le ore di insolazione per ogni luogo della **Terra** cambiano a seconda del periodo dell'anno in cui ci si trova. Infatti nel nostro emisfero boreale si ha il massimo numero di ore di insolazione intorno al 21 Giugno (solstizio estivo) ed un minimo intorno al 22 dicembre (solstizio invernale), mentre nell'emisfero australe in queste due epoche si ha rispettivamente il solstizio invernale in giugno e quello estivo in dicembre. La ragione della variabilità del numero di ore di insolazione nel corso dell'anno lo si può capire osservando la **Figura 10 bis** in cui è schematizzato il moto diurno del **Sole** per una località posta a 45° di latitudine Nord (**Torino**) nel corso di un anno. Il **Sole** nel suo percorso diurno descrive archi di cerchio paralleli all'**Equatore Celeste** di cui quello più basso sopra all'orizzonte è sotto l'**Equatore Celeste** di una quantità angolare pari all'obliquità dell'**Eclittica** ($-\epsilon$) in coincidenza del Solstizio invernale, mentre quello immediatamente sopra l'**Equatore** è spostato della quantità ($+\epsilon$), in occasione del **Solstizio estivo**. Come è possibile vedere visivamente dalla **Figura 10 bis** l'arco di cerchio sotto l'**Equatore** è molto più corto di quello equatoriale il quale a sua volta è più corto di quello sopra l'**Equatore**. Queste lunghezze di archi di cerchio si traducono in ore di insolazione che per **Torino** sono di **8^h46^m al Solstizio invernale, 12^h10^m agli Equinozi (primaverile e autunnale) e 15^h37^m al Solstizio estivo**. La situazione diventa completamente differente se ci spostiamo all'**Equatore** o ai **Poli**. Infatti all'**Equatore** il **Sole** (vedi **Figura 9** in cui immaginiamo di sostituire le **Stelle** con il **Sole**) descrive sempre archi di cerchio perpendicolari al piano dell'orizzonte di uguale ampiezza anche se oscillano al massimo di $\epsilon \approx \pm 23^{\circ},5$ rispetto all'**Equatore Celeste** (perpendicolare all'orizzonte) nell'arco di 6 mesi. Quindi in questo caso per tutto l'anno le ore di insolazione giornaliere saranno sempre pari a **12^h 08^m**. Al **Polo** invece il **Sole** descrive sempre dei cerchi paralleli all'orizzonte per cui resta per 6 mesi sopra l'orizzonte e per altri 6 mesi sotto l'orizzonte (per comprendere meglio il fenomeno aiutarsi con la **Figura 11** sostituendo, al solito, il **Sole** al posto delle **Stelle**). In questo caso avremo per 6 mesi 24 ore di insolazione al giorno poiché in questo periodo il **Sole** non tramonta mai e altri 6 mesi di tenebre poiché il **Sole** resta sempre sotto l'orizzonte. Il fatto che agli **Equinozi** (che teoricamente starebbero a significare la perfetta uguaglianza tra le ore diurne e notturne) le ore di insolazione siano sempre superiori alle 12 ore di circa una decina di minuti (per le nostre latitudini) dipende dal fatto che il tramonto del **Sole** lo si considera quando lo si vede sparire con il suo bordo sotto l'orizzonte, per cui il suo centro si trova sotto di **16'** e dal fatto che la rifrazione atmosferica devia verso l'alto i raggi provenienti dal **Sole** innalzandolo di circa **34'** sopra l'orizzonte. Pertanto le dimensioni del disco solare (**16'** di raggio) e la rifrazione atmosferica (**34'**) permettono di vedere sparire (o apparire al mattino) il disco solare quando questo in realtà è sotto di circa **50'**, quantità che allunga appunto di qualche minuto alle nostre latitudini il periodo di insolazione teorico di 12 ore.

Tuttavia prima che il cielo diventi buio dopo il tramonto (o che inizi a schiarirsi prima del sorgere) esiste un intervallo di tempo che viene definito comunemente **Crepuscolo**. Più precisamente si definisce **Crepuscolo Civile** quell'intervallo di tempo che intercorre tra il momento del tramonto del bordo del **Sole** fino a quando il centro del suo disco si trova sotto l'orizzonte di **6 gradi**. In tali condizioni si è in grado di osservare già le **Stelle** di prima grandezza e alla fine di questo periodo vengono accese le luci nelle strade delle città (circa mezz'ora dopo il tramonto per le nostre latitudini).

Il **Crepuscolo Nautico** è rappresentato dall'intervallo di tempo in cui il **Sole** passa dai **6 gradi** sotto l'orizzonte fino a **12 gradi**. In tali condizioni si è ancora in grado di vedere l'orizzonte marino e le **Stelle** fino alla **magnitudine 3** al fine di poter fare il "**punto nave**" con il **sestante**.

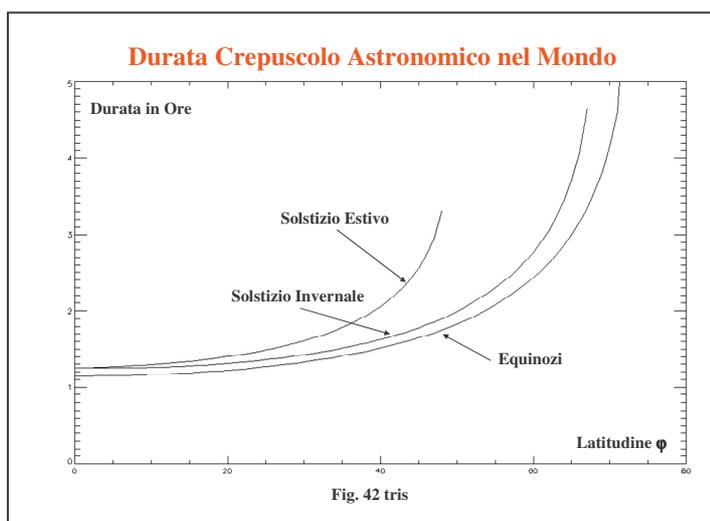
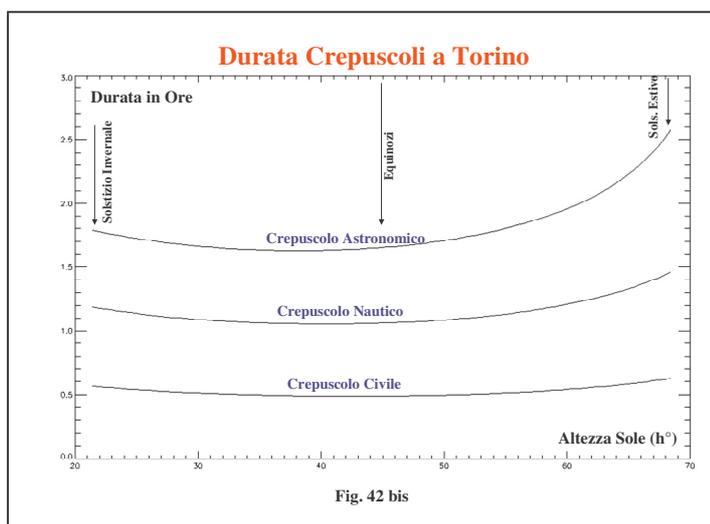
Il **Crepuscolo Astronomico** è rappresentato dall'intervallo di tempo in cui il **Sole** passa da **12 gradi** sotto l'orizzonte ai **18 gradi**. In queste condizioni il cielo raggiunge la massima oscurità e con tali

condizioni si vedono le **Stelle** fino alla **magnitudine 6** (limite di visibilità delle **Stelle** ad occhio nudo).

Analoghe considerazioni valgono per gli intervalli di tempo precedenti il sorgere del **Sole (Alba)**.

Si ricorda che la durata del **Crepuscolo** dipende essenzialmente dalla latitudine del luogo di osservazione e secondariamente dal periodo dell'anno in cui ci si trova. Ovviamente all'equatore il **Crepuscolo** dura di meno che in altri luoghi, in quanto il **Sole** scende sotto l'orizzonte in maniera perpendicolare e quindi percorre i **6°, 12°, 18°** molto velocemente. Con il crescere della latitudine il **Sole** taglia l'orizzonte in maniera sempre più inclinata man mano che questa aumenta, per cui la durata della discesa dell'astro di **6, 12, 18°** sotto l'orizzonte tende ad allungarsi progressivamente. A parità di latitudine, però, il **Crepuscolo** (qualunque esso sia) dura di meno agli **Equinozi**, mentre dura di più al **Solstizio invernale** ed ancora di più a quello **estivo**. Si può dimostrare, con la trigonometria sferica, che gli archi di cerchio percorsi dal **Sole** nella fase di **Crepuscolo** al **Solstizio estivo** sono più grandi di quelli del **Solstizio invernale**, i quali sono più grandi di quelli corrispondenti agli **Equinozi** (a **Torino** il **Crepuscolo Civile** dura **29^m** agli **Equinozi**, **34^m** in **Inverno** e **37^m** in **Estate**).

Nella **Figura 42 bis** sono riportate le durate dei **Crepuscoli** calcolati per Torino durante tutto l'anno e nella **Figura 42 tris** le durate del **Crepuscolo Astronomico** in funzione della latitudine del luogo considerato durante i **Solstizi** e gli **Equinozi**.



Giorno Astronomico e Giorno Civile

Quanto descritto prima riguarda essenzialmente la durata del **Giorno Siderale** e del **Giorno Solare**. Se volessimo stabilire l'istante di inizio di ciascun tipo di giorno, potremmo dire che per quanto concerne il **Giorno Siderale**, l'orologio segna le ore zero quando l'**Equinozio Medio di Primavera** culmina superiormente al meridiano locale dell'osservatore. Per quanto riguarda il **Giorno Solare** invece si hanno ancora due sistemi di inizio definiti rispettivamente **Giorno Astronomico** e **Giorno Civile**.

Il **Giorno Astronomico** usato in astronomia fino al 1924, iniziava quando il **Sole Medio** culminava superiormente al meridiano centrale del **Fuso Orario** relativo al luogo di osservazione (vedi oltre), per cui a mezzanotte l'orologio segnava le ore 12 anziché le ore 24. Questa unità di tempo era molto comoda per le osservazioni notturne, in quanto non occorreva cambiare la data alle osservazioni stesse fatte durante tutta una notte.

Il **Giorno Civile** intuitivamente usato per scopi civili e tuttora adottato dall'umanità, ha inizio con la culminazione inferiore del **Sole Medio** (mezzanotte), al meridiano centrale del **Fuso Orario** relativo al luogo di osservazione.

In altri termini gli orologi di cui facciamo uso nella vita di tutti i giorni sono ancorati al **Giorno Civile** e segnano in sostanza il **Tempo Solare Medio** aumentato di 12 ore.

Parlando di **Giorno Astronomico** e **Giorno Civile** abbiamo introdotto dei vocaboli nuovi che meritano un chiarimento; più precisamente si è parlato di **Meridiano Centrale del Fuso Orario**.

Vediamo di dare una spiegazione semplice ed esauriente su questo concetto che implica la posizione geografica dei luoghi di osservazione.

Si è detto che il **Tempo Siderale** è un tempo che assume valori diversi, in un certo istante, per località che si trovano su meridiani differenti, in quanto diversi sono gli istanti di transito dell'**Equinozio Medio** su questi.

Inoltre è noto che la distanza angolare del meridiano geografico di un luogo dal meridiano fondamentale passante per **Greenwich** viene chiamata **Longitudine**, ed è contata sull'**Equatore** positivamente verso **Ovest** e negativamente verso **Est** in ore o gradi.

In base a quanto sopra affermato, segue che il **Tempo Siderale** di due località diverse, differirà per la differenza di longitudine delle medesime espressa in ore, minuti e secondi di **Tempo Siderale Medio (TS)**.

Infatti supponendo per esempio che a Milano un orologio a **Tempo Siderale Medio** segni le ore **12 di TS**, a **Torino**, che si trova ad Ovest di Milano di $6^m 04^s$ in longitudine, nello stesso istante l'orologio siderale segnerà le ore: $TS(Torino) = TS(Milano) + \lambda(Milano) - \lambda(Torino) = 12^h - 6^m 04^s = 11^h 53^m 56^s$

Chiaramente l'orologio di Milano anticipa su quello di **Torino** perché l'**Equinozio Medio** passa prima per il meridiano di Milano, poi per quello di **Torino** e ancora successivamente per quello di **Greenwich**.

Ora, poiché il **Tempo Siderale** viene usato solo per scopi astronomici, il fatto di averlo diverso per ogni località non porta ripercussioni sulla vita civile.

dovremmo spostare le lancette del nostro orologio per regolarci sul **Tempo Solare Medio Locale** del luogo in cui ci troviamo.

Viceversa, proviamo ad immaginare di adottare un **Tempo Solare Medio** variabile di località in località come abbiamo fatto per il **Tempo Siderale**; chiaramente succedrebbe un caos incredibile, perché tutte le volte che ci spostassimo anche di pochi chilometri in **Longitudine**,

Ripetendo l'esempio precedente, se l'orologio di una persona che si trova a Milano segna le ore 12 (mezzanotte) di **Tempo Solare Medio Locale**, nello stesso istante l'orologio di una persona che si trova a **Torino** dovrà segnare le ore **11^h 53^m 56^s** di sera di **Tempo Solare Medio Locale**. Anche in questo caso il **Sole Medio** transita prima al meridiano di Milano e poi su quello di **Torino**

Fusi Orari , Tempo di Zona

Ovviamente, come é stato detto prima, un sistema di misura del tempo così variabile per località anche poco distanti tra loro, indurrebbe tutte le persone che viaggiano a spostare continuamente le lancette dei loro orologi a seconda dei luoghi di volta in volta attraversati.

Fortunatamente per gli usi civili è stato adottato il **Tempo Civile di Zona** che è un tempo solare uguale in ogni località compresa tra due meridiani geografici, separati in longitudine di **15°** o, il che è equivalente, a **un'ora**. Questa fetta di superficie viene denominata **Fuso Orario** e l'ora che gli corrisponde è quella solare media locale aumentata di 12 ore del meridiano centrale che biseca il fuso in due fette uguali di **7°,5** di ampiezza o il che è equivalente a **30 minuti di tempo**.

E' utile ricordare che tutta la superficie terrestre è divisa in 24 fusi orari sfalsati sequenzialmente di un'ora esatta (vedi **Figura 42**).

Se la linea che divide un **Fuso Orario** da un altro fosse rettilinea, ben difficilmente passerebbe sul confine di due nazioni contigue. In questi casi allora è valsa la convenzione che tale linea potesse seguire i confini orografici delle nazioni al fine di ridurre al minimo i **Tempi Civili di Zona** delle nazioni stesse.



Fig. 42

Il primo **Fuso Orario** di riferimento è quello il cui meridiano centrale passa per **Greenwich** e che si estende per **7°,5** o mezz'ora a Est e a Ovest di questo.

Il tempo di questa zona viene denominato **Tempo Medio Civile di Greenwich**.

Il secondo fuso orario che si estende a oriente di quello di **Greenwich**, è quello che interessa l'Italia e i paesi centrali dell'Europa.

Questo fuso adotta dal **1893** un tempo che viene denominato **Tempo Medio Civile dell'Europa Centrale (TMEC)**, che è **avanti di un'ora esatta** su quello di **Greenwich**. Tale **Tempo** è quello che comunemente viene registrato dai nostri orologi.

Vi sono però degli stati che comprendono più fusi orari, ad esempio gli Stati Uniti ne contano 7, il Canada 5, il Brasile e la Russia 3, ecc.

Altri stati hanno dei tempi con designazioni speciali, indipendenti cioè dall'ora del **Fuso Orario** che gli spetterebbe, le cui variazioni ammontano anche a frazioni dell'ora come è possibile vedere dalla **Figura 42**, dove per alcuni stati sono riportate delle cifre indicanti appunto queste ore particolari. (es. ora dell'India, di **Terranova**, delle Canarie, ecc.).

Ritorniamo per un momento al **Fuso Orario** che interessa l'Italia, ricordando che il meridiano centrale di questo passa, tra le tante località italiane, per l'Osservatorio Astronomico di Catania situato sull'Etna.

Orbene, in conseguenza dell'**Ora di Zona**, tutti gli orologi in Italia segnano la stessa ora, per cui si avranno ad esempio le ore 12 di **Tempo Medio Civile** (mezzogiorno) sia a **Torino**, che a Milano e a Catania.

Però, questa ora non rispecchia realmente la posizione del **Sole Medio**, in quanto solo per l'Osservatorio di Catania e altre località sullo stesso meridiano, culmina esattamente a mezzogiorno, mentre a Milano e **Torino** dovremo ancora attendere un tempo che dipende dalla differenza di longitudine di queste città dall'Osservatorio di Catania.

Infatti poiché Milano dista longitudinalmente dall'Osservatorio di Catania di $23^m 12^s$ e **Torino** di $29^m 16^s$, il **Sole Medio** culminerà in queste due località rispettivamente alle $12^h 23^m 12^s$ e $12^h 29^m 16^s$ di **Tempo Civile Medio** ogni giorno.

Si ricorda che le culminazioni del **Sole** a **Torino** e a Milano descritte poc'anzi, sono relative al **Sole Medio** e non a quello **Vero** che realmente osserviamo, per cui se volessimo l'istante di culminazione a **Torino** e a Milano di quest'ultimo dovremmo sottrarre algebricamente dagli istanti sopra riportati il valore della **Equazione del Tempo**.

Così, se ad esempio ci interessa sapere a che ora culmina il **Sole Vero** a **Torino** il 17 di Gennaio occorre sottrarre alle $12^h 29^m 16^s$ del transito del **Sole Medio** il valore della **Equazione del Tempo** che per quel giorno ammonta a circa **-10 minuti** (vedi **Figura 40 con i segni invertiti**), per cui il transito del **Sole Vero** a **Torino** avverrà alle ore $12^h 39^m 16^s$ di **Tempo Civile Medio**.

Abbiamo detto che per ogni **Fuso Orario** corrisponde un'ora diversa. Infatti se in Italia sono le ore 12, nel medesimo istante in **Inghilterra** sono le 11, mentre a **New York** sono le 6 del mattino e a Mosca le ore 14, ecc.).

Diametralmente opposto al **Meridiano di Greenwich**, troviamo l'antimeridiano detto comunemente **Linea Internazionale del Cambiamento di Data**.

Questa linea, per ragioni contingenti ha le caratteristica di non essere rettilinea e di tagliare dal **Polo Nord** al **Polo Sud** tutto l'oceano Pacifico.

L'attraversamento di questa linea in un senso o nell'altro comporta una modificazione della data ma non dell'ora segnata dall'orologio del viaggiatore che la sta attraversando.

Più precisamente, se l'orologio di un viaggiatore proveniente dal Giappone e diretto a Est verso le Hawaii trovandosi in prossimità di tale linea, segna le ore 12 di lunedì, appena l'avrà attraversata il suo orologio segnerà sempre le ore 12, ma non più di lunedì, bensì di domenica. In altre parole attraversando questa ipotetica linea da Ovest verso Est si è tornati indietro di un giorno esatto.

Viceversa se si attraversa la linea in senso opposto, cioè dalle **Hawaii** verso il **Giappone**, la data viene modificata di un giorno avanti, ad esempio dalle ore 12 di domenica alle ore 12 di lunedì.

Tempo Legale

Ricordiamo ancora l'adozione in alcuni stati europei, compresa l'Italia, di un tipo di tempo definito **Ora Legale Estiva**. Questo tipo di tempo è stato adottato in Italia durante la prima guerra mondiale dal 1916 al 1920, quindi abolita per una ventina d'anni, per essere poi ripristinata durante la seconda guerra mondiale dal 1940 fino al 1948, con un'altra interruzione fino al 1966 (vedi **Tabella 2**).

Dal 1966 ai giorni nostri l'ora legale è stata utilizzata ininterrottamente nel periodo estivo per questioni di risparmio energetico. Per realizzare tale risparmio si è pensato di spostare in avanti le lancette dell'orologio di un'ora esatta durante il periodo estivo rispetto all'ora segnata nel periodo invernale (TMEC), come è possibile constatare dalla **Tabella 2**,

Infatti, prendendo come esempio **l'anno 2005**, **l'Ora Legale Estiva** è entrata in vigore **il 27 marzo alle ore 2 di TMEC** nel senso che a quell'ora si sono portate le lancette dell'orologio in avanti di un'ora, cioè alle **ore 3 di Tempo Legale**, per essere poi ripristinata **l'Ora Invernale (TMEC)**, il **30 di ottobre dalle ore 3 estive alle ore 2 invernali di TMEC**.

Si ricorda ulteriormente che l'ora invernale in Italia (TMEC) è avanti di un'ora esatta rispetto all'ora fondamentale di **Greenwich** (vedi più avanti **Tempo Universale (UT)**) mentre in estate **l'Ora Legale** risulta **avanti di 2 ore** esatte sul tempo di **Greenwich**.

Nell'ambito europeo, ad esempio la Francia, che si trova un fuso orario prima dell'Italia, adottò dal 1946 fino al 1981 per tutta la durata dell'anno l'ora legale, seguendo così il **Tempo Medio dell'Europa Centrale** nei periodi in cui l'Italia non adottava questo tipo di tempo estivo.

A partire dal 1982 invece, l'Italia la Francia ed altri stati europei hanno deciso di adottare tutti la medesima ora legale al fine di rendere i rapporti commerciali e di altro tipo, fra stati di diverso **Fuso Orario**, più agevoli. La decisione di mantenerla dal 2007 al 2011 è stata presa dalla Commissione del Parlamento Europeo il 4 marzo 2007, la quale ogni 5 anni deciderà se ci sono dei reali vantaggi energetici ed economici per continuare ad adottare questo tipo di ora.

Avendo ora completato il quadro dei moti dell'asse di rotazione della **Terra** e dei vari tipi di giorno che ne derivano analizziamo adesso le varie definizioni di **Anno**.

TABELLA 2
Ora Legale Estiva in Italia dal 1916 al 2011

Anno	Inizio		Fine	
1916	dalle ore 24:00 del	03-giu	alle ore 24:00 estive del	30-set
1917	"	31-mar	"	30-set
1918	"	09-mar	"	06-ott
1919	"	01-mar	"	04-ott
1920	"	20-mar	"	18-set
...				
1940	dalle ore 24:00 del	14-giu		
...				
1942			alle ore 03:00 estive del	02-nov
1943	dalle ore 02:00 del	29-mar	"	04-ott
1944	"	03-apr	alle ore 02:00 estive del	17-set
1945	"	02-apr	alle ore 01:00 estive del	15-set
1946	"	17-mar	alle ore 03:00 estive del	06-ott
1947	dalle ore 00:00 del	16-mar	alle ore 01:00 estive del	05-ott
1948	dalle ore 02:00 del	29 febbraio	alle ore 03:00 estive del	03-ott
...				
1966	dalle ore 00:00 del	22-mag	alle ore 24:00 estive del	24-set
1967	"	28-mag	alle ore 01:00 estive del	24-set
1968	"	26-mag	"	22-set
1969	"	01-giu	"	28-set
1970	"	31-mag	"	27-set
1971	"	23-mag	"	26-set
1972	"	28-mag	"	01-ott
1973	"	03-giu	"	30-set
1974	"	26-mag	"	29-set
1975	"	01-giu	"	28-set
1976	"	30-mag	"	26-set
1977	"	22-mag	"	25-set
1978	"	28-mag	"	01-ott
1979	"	27-mag	"	30-set
1980	dalle ore 02:00 del	06-apr	alle ore 03:00 estive del	28-set
1981	"	29-mar	"	27-set
1982	"	28-mar	"	26-set
1983	"	27-mar	"	25-set
1984	"	25-mar	"	30-set
1985	"	31-mar	"	29-set
1986	"	30-mar	"	28-set
1987	"	29-mar	"	27-set
1988	"	27-mar	"	25-set
1989	"	26-mar	"	24-set
1990	"	25-mar	"	30-set
1991	"	31-mar	"	29-set
1992	"	29-mar	"	27-set
1993	"	28-mar	"	26-set
1994	"	27-mar	"	25-set
1995	"	26-mar	"	24-set
1996	"	31-mar	"	27-ott
1997	"	30-mar	"	26-ott
1998	"	29-mar	"	25-ott
1999	"	28-mar	"	31-ott
2000	"	26-mar	"	29-ott
2001	"	25-mar	"	28-ott
2002	"	31-mar	"	27-ott
2003	"	30-mar	"	26-ott
2004	"	28-mar	"	31-ott
2005	"	27-mar	"	30-ott
2006	"	26-mar	"	29-ott
2007	"	25-mar	"	28-ott
2008	"	30-mar	"	26-ott
2009	"	29-mar	"	25-ott
2010	"	28-mar	"	31-ott
2011	"	27-mar	"	30-ott

Anno Siderale, Anno Tropicco, Anno Anomalistico

E' stato detto che la **Terra** rivolge attorno al **Sole** in un'orbita ellittica sul piano dell'**Eclittica**, con velocità maggiori in prossimità del **Perielio** e minori all'**Afelio** secondo le leggi di **Keplero**.

Ora se immaginiamo il periodo di tempo che la **Terra** impiega per fare un giro completo, o meglio una rivoluzione di 360° intorno al **Sole**, allora questo periodo viene chiamato **Anno Siderale**.

Se invece si considera il tempo impiegato dalla **Terra** per attraversare due volte consecutive la **Linea dei Nodi o degli Equinozi** nello stesso punto, allora quest'altro periodo viene chiamato **Anno Tropicco**. Ora, poiché la linea degli equinozi si muove sull'**Eclittica** in senso opposto al moto di rivoluzione della **Terra** di una quantità che ammonta a $50'',27$ all'anno, dovuta alla **Precessione Generale**, ne segue che la **Terra** per ritornare allo stesso equinozio dovrà percorrere un arco di ellisse corrispondente a $360^\circ - 50'',27 = 359^\circ 59' 09'',73$ (**Anno Tropicco**), quindi in un tempo minore di quello relativo ad una rotazione completa in un **Anno Siderale**.

Pertanto la **Terra** compie una rivoluzione completa di 360° in **1 Anno Siderale** (vedi **Figura 43**) pari a **Giorni Solari Medi** (Explanatory Supplement, 1961):

$$1 \text{ Anno Siderale} = 365^d,256 360 42 + 0^d,000 000 11 \cdot T = 365^d 06^h 09^m 09^s,5 + 0^s,01 \cdot T$$

dove T è il numero di **Secoli Giuliani** trascorsi dalle **ore 12 del Tempo delle Effemeridi del 31 Dicembre 1899** (vedi più avanti).

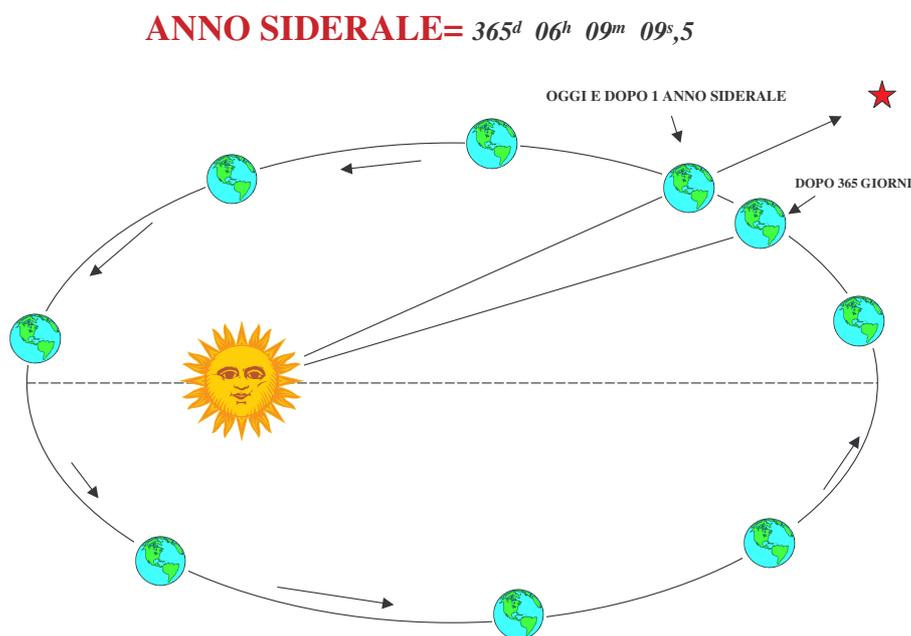


Fig. 43

Invece la **Terra** per ritornare consecutivamente 2 volte al **Punto Gamma** impiega **1 Anno Tropicco** pari a **Giorni Solari Medi** (vedi **Figure 31 e 44**):

$$1 \text{ Anno Tropicco} = 365^d,242 198 78 + 0^d,000 00614 T = 365^d 05^h 48^m 46^s,0 + 0^s,530 T$$

$$\text{ANNO TROPICO} = 365^d 05^h 48^m 46^s,0$$

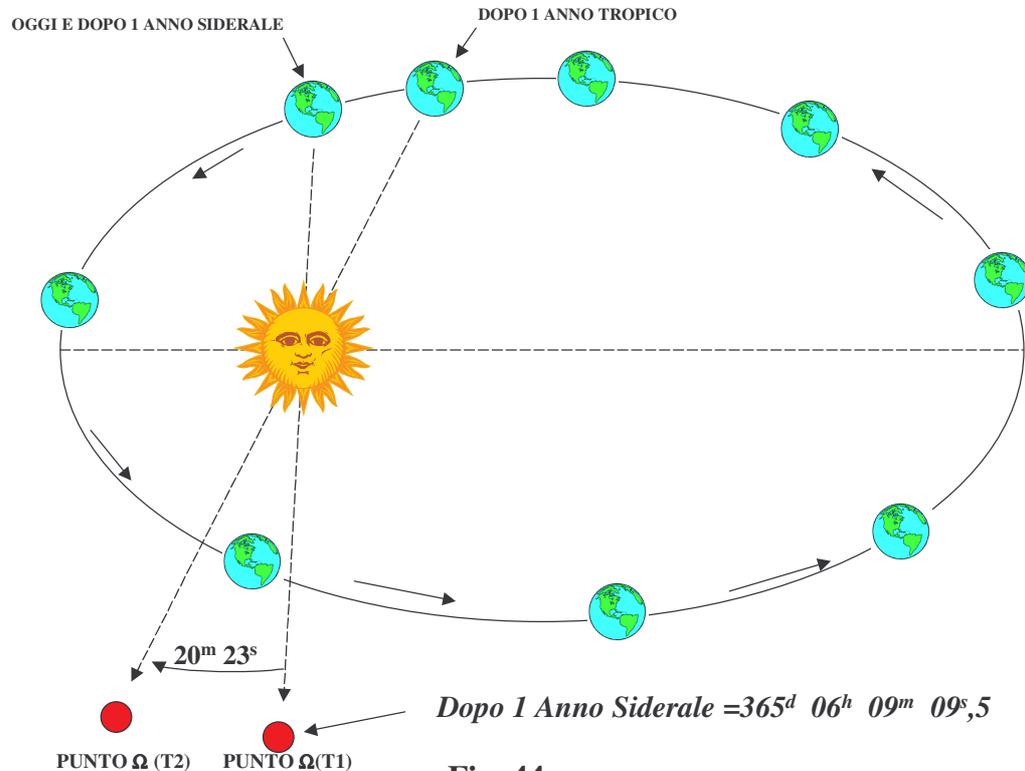


Fig. 44

Da queste due relazioni si vede che l'Anno Siderale tende ad aumentare di **1 secondo ogni diecimila anni**, mentre l'Anno Tropico tende a diminuire di **5,3 secondi ogni mille anni**, quantità queste che fanno capire quanto sia stabile nel corso del tempo il periodo di rivoluzione della Terra.

Infatti, ammettendo corretto l'incremento secolare dell'Anno Siderale, nel periodo Devoniano (vedi Figura 21), cioè circa **400 milioni di anni fa**, il periodo di rivoluzione della Terra doveva essere **più corto di appena 10^h 34^m** rispetto ai circa **365 giorni e un quarto** attuali, mentre il periodo di rotazione giornaliero doveva essere di **poco superiore alle 22 ore**, come è stato detto precedentemente.

Poiché la **Linea degli Equinozi** oscilla, causa la **Nutazione**, rispetto ad una posizione media in **18,6 anni**, la durata dell'Anno Tropico risulta dalla media di un grandissimo numero di anni.

Dalle considerazioni precedenti seguirebbe che il ritorno della Terra all'Equinozio di Primavera (o il che è analogo del Sole, prescindendo dalla Nutazione) dovrebbe avvenire sempre dopo un Anno Tropico esatto. In realtà non è così, per la semplice ragione che anche il piano orbitale della Terra ruota nello stesso senso della rivoluzione di questa intorno al Sole; in maniera tale che l'asse maggiore dell'orbita terrestre, detta **Linea degli Apsidi**, si sposta rispetto alle Stelle fisse di **11",633.9** all'anno (riferito al 1900), per cui il tempo impiegato per ritornare due volte consecutive al **Perielio** (giacente sulla **Linea degli Apsidi**), risulta più lungo di quello Siderale (vedi Figura 45). Quindi **1 Anno Anomalistico** risulta pari a **Giorni Solari Medi**.

$$1 \text{ Anno Anomalistico} = 365^d,259 641 34+0^d,000 003 04 \cdot T = 365^d 06^h 13^m 53^s,0 + 0^s,26 \cdot T$$

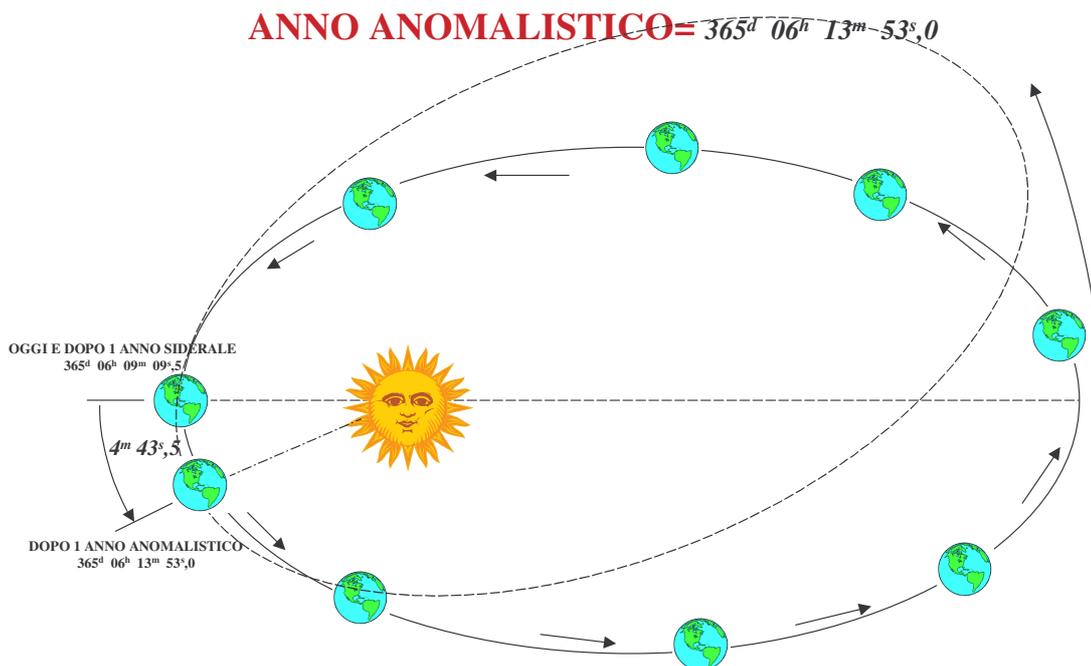


Fig. 45

Pertanto se consideriamo lo spostamento del **Perielio** rispetto ad un punto fisso in cielo questo effettuerà un giro esatto di **360°** in un periodo precessionale di :

$$\textit{Precessione linea degli Apsidi (punto fisso)} = 360 \cdot 3.600/11'',6339 \approx 111.400 \text{ anni}$$

Viceversa se riferiamo lo spostamento del **Perielio** rispetto al **Punto Gamma** equinoziale, il tempo intercorso dal **Perielio** (o **Linea degli Apsidi**) per ritornare consecutivamente due volte su detto punto è più corto del periodo precessionale precedente, in quanto il **Punto Gamma** si sposta in senso opposto al moto della **Linea degli Apsidi** della quantità già nota di **50'',2564** all'anno, per cui i due spostamenti si sommano portando ad un valore :

$$S = 50'',2564 + 11'',6339 = 61'',8903/\text{anno}$$

da cui si deduce il **Periodo Precessionale della Linea degli Apsidi** rispetto al **Punto Gamma**:

$$\textit{Precessione linea degli Apsidi (Punto } \gamma) = 360 \cdot 3.600/61'',8903 \approx 20.940 \text{ anni}$$

Ovviamente questi due periodi precessionali non hanno niente a che vedere con la **Precessione Generale** degli equinozi la quale si manifesta con uno spostamento effettivo dell'asse terrestre sulla volta **Celeste**, mentre gli ultimi due tipi di Precessione rappresentano solo lo spostamento di un punto (**Perielio**) sull'orbita rispetto ad una **Galassia** lontana (**Punto Fisso**) o al **Punto Gamma**, mobile rispetto alla scenario di oggetti lontani.

Avendo stabilito che il piano orbitale, e quindi la **Linea degli Apsidi** ruota rispetto alle **Stelle** fisse, ne segue che la posizione del **Perielio** tenderà con spostamenti secolari, ora ad avvicinarsi, ora ad allontanarsi dalla **Linea degli Equinozi**. Poiché la velocità della **Terra** è massima al **Perielio** e

minima all’Afelio, si verificherà che essa impiega meno di un Anno Tropic per ritornare all’Equinozio di Primavera quando il Perielio si avvicina a tale punto, mentre impiega più di un Anno Tropic quando questo si allontana (vedi Figura 46).

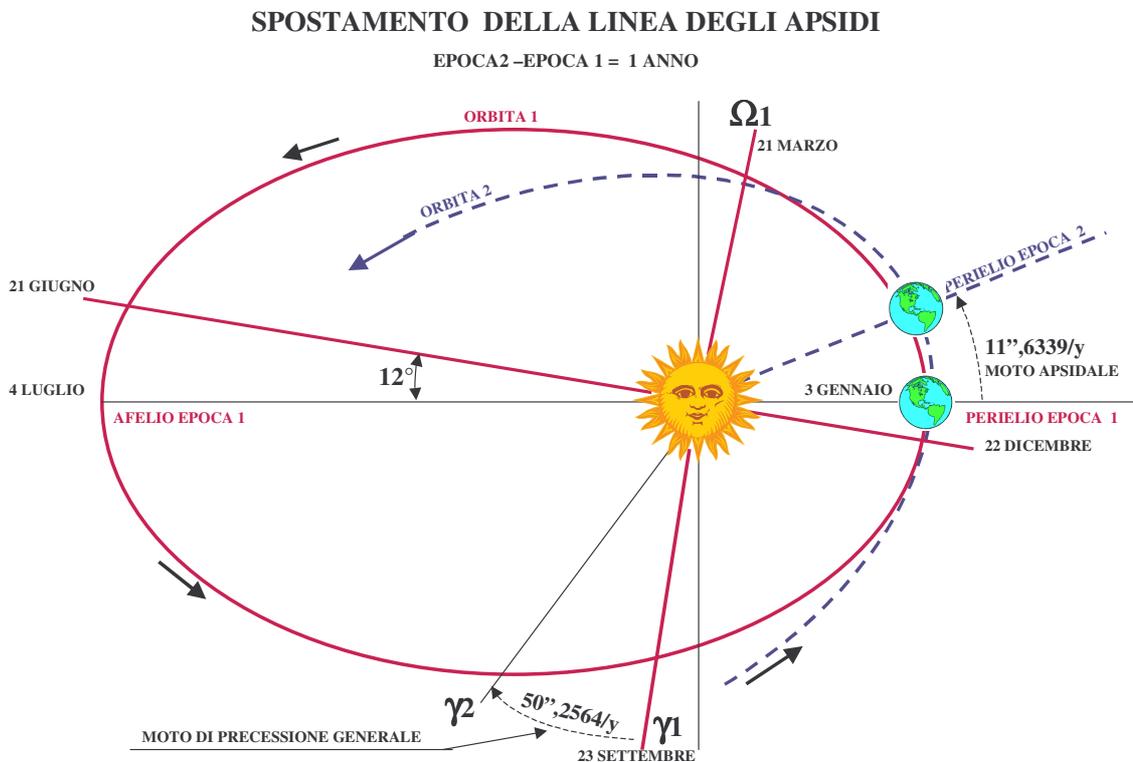


Fig. 46

Anche la durata delle stagioni nel corso del tempo è variabile, causa la rotazione della **Linea degli Apsidi** che porta la **Terra** a percorrere archi di ellisse di **90°** (corrispondenti ad una stagione) in tempi più o meno lunghi a seconda della posizione di questa rispetto al settore stagionale che consideriamo come è possibile vedere dalla **Tabella 3** dove sono riportate le durate medie delle stagioni di questi ultimi anni (Cecchini G., 1969).

Tabella 3
DURATA DELLE STAGIONI

<i>Primavera</i>	<i>92 giorni 21 ore</i>
<i>Estate</i>	<i>93 giorni 14 ore</i>
<i>Autunno</i>	<i>89 giorni 18 ore</i>
<i>Inverno</i>	<i>89 giorni 1 ora</i>

Come è possibile constatare sia dalla **Figura 30** che dalla **Tabella 3** la stagione più lunga è l'estate e la sua durata tende ad aumentare di **58 minuti ogni secolo** mentre diminuisce della stessa quantità in inverno. La primavera invece tende ad accorciarsi di **1 ora e 40 minuti per secolo**, mentre l'autunno si allunga dello stesso valore.

Calendario Giuliano

La grande confusione che si era creata nel calendario luni-solare romano, che metteva le festività religiose in giorni sbagliati nel corso dell'anno, spinse Giulio Cesare nel **46 a.C.** corrispondente all'anno **708 a.U.c. (ab Urbe condita)** a chiedere aiuto agli egiziani per mettere ordine al proprio calendario.

A questo proposito occorre ricordare che nel **46 a.C.** il calendario romano risultava spostato di 3 mesi rispetto al calendario solare, nel senso che la primavera capitava a Gennaio, in pieno inverno, anziché a Marzo. Pertanto, Giulio Cesare per risolvere la questione si rivolse a **Sosigene**, un astronomo egiziano di Alessandria, al quale affidò il compito di modificare il confuso calendario romano. Per prima cosa **Sosigene** portò la lunghezza dell'anno **46 a.C. (Anno 708 di Roma)** a ben **455 giorni**, aggiungendo **80 giorni all'anno egizio di 365 giorni** per riequilibrare nuovamente le stagioni portando **l'inizio della primavera al 25 di Marzo**. Quindi decise di aggiungere **un giorno intercalare (bisesto) ogni 4 anni** in maniera da accordare il più possibile **l'Anno Astronomico** con quello **Civile** nella convinzione (errata) che **l'Anno Tropic** fosse esattamente di 365 giorni e un quarto).

Il giorno supplementare degli anni bisestili venne aggiunto al mese di febbraio, ultimo mese del calendario romano all'epoca della riforma. Poiché i numeri dispari venivano considerati fortunati il giorno aggiuntivo non venne inserito alla fine ma venne intercalato tra il 24 e il 25 febbraio e, per non modificare il nome dei giorni, non venne assegnato ad esso alcun appellativo particolare; questo 25° giorno di febbraio venne denominato, come il precedente, **sexto ante kalendas martias** (il sesto prima delle kalende di marzo) e diventò **bis sexto ante kalendas martias**, sesto per la seconda volta, da cui si derivò l'epiteto bisestile. Con questo trucco si ottenne che questo mese, consacrato al dio dei Morti e considerato nefasto, conservasse in apparenza un numero pari di giorni (28). Per ristabilire la coincidenza tra anno civile e anno basato sull'alternarsi delle stagioni, nell'anno della riforma, Giulio Cesare aggiunse eccezionalmente al calendario 2 mesi, di 33 e 34 giorni rispettivamente, tra November e December, oltre al mese mercedario, che quell'anno era già stato intercalato.

In quest'ottica **il primo Anno Giuliano bisestile fu il 45 a. C.** che nella notazione Astronomica corrisponde all'anno **-44 (1 anno in meno)**, da cui segue la semplice regola che tutti gli anni divisibili per 4 diventano bisestili compreso l'anno 1 a.C. che nella notazione astronomica diventa l'anno 0. Analogo discorso per gli anni bisestili dopo la nascita di Cristo.

Inoltre **Sosigene** modificò la lunghezza dei mesi alternandoli con 31 e 30 giorni, eccezion fatta per Febbraio. Infatti attribuì a Marzo 31 giorni come (primo mese dell'anno nel vecchio calendario romano), facendo seguire Aprile con 30 giorni, Maggio con 31, Giugno con 30, e così via fino a Febbraio, ultimo mese dell'anno, con 29 giorni o 30 giorni negli anni bisestili.

Da quei tempi ancora oggi è restata immutata la denominazione dei mesi del **Calendario Romano**, a parte lo spostamento da parte di **Sosigene** dell'inizio dell'anno da Marzo a Gennaio, mese di insediamento dei consoli. Secondo il precedente calendario romano Settembre era realmente il settimo mese, mentre Ottobre era l'ottavo e così via. Il mese di Luglio invece, originariamente chiamato Quintilis, prese il nome da Giulio Cesare (Julius) mentre il mese di Agosto chiamato Sextilis prese quello di Cesare Augusto (Augustus). Infatti proprio con l'avvento al trono di Cesare Augusto, il popolo decise di attribuire il mese Sextilis a lui. Purtroppo questo mese conteneva solo 30 giorni, e poiché a Giulio Cesare era stato attribuito il mese di Luglio con 31 giorni, il popolo per non fare parzialità, nell'anno 7 a.C. del nuovo calendario Giuliano, diede ad Augusto la possibilità di modificare il suo mese (Agosto) portandolo così a 31 giorni, modificando l'alternanza originale dei 31 e 30 giorni. Con questa modifica Settembre passò a 30 giorni, Ottobre a 31 e così via fino a Febbraio che passò agli attuali 28 giorni o 29 giorni, negli anni bisestili.

Pertanto con l'Istituzione del **Calendario Giuliano di 365,25 giorni** si ebbe un calendario abbastanza aderente al periodo di rivoluzione della **Terra** intorno al **Sole (Anno Tropic)** che, se non fosse stato successivamente modificato, avrebbe portato ad un anticipo della primavera della quantità:

$$\text{Anno Giuliano} - \text{Anno Tropic} = 365^d,25 - 365^d,242\ 198\ 78 = 0^d,007\ 801\ 3$$

cioè di circa **8 giorni ogni 1.000 anni**, un errore decisamente accettabile per quei tempi.

In realtà la riforma proposta da **Sosigene** non venne applicata subito in maniera corretta.

Infatti, dopo la morte di Giulio Cesare i pontefici intercalarono un anno bisestile ogni **3 anni**, invece che ogni **4 anni**. Dopo **36 anni** erano stati così **intercalati 12 anni bisestili invece di 9**. Augusto, nell'anno **8 a.C.**, per rimediare a questo errore, decise che non ci sarebbero stati anni bisestili per **12 anni**. La riforma giuliana venne finalmente applicata correttamente solo a partire dall'anno **5 d.C.**.

I **50 anni anteriori** vennero chiamati dai posteri **Anni Giuliani Erronei**. Gli anni bisestili del **Calendario Giuliano** erano tutti quelli le cui ultime due cifre erano divisibili per 4. Con questa ripartizione il **Calendario Giuliano** si ripeteva in modo identico ogni **28 anni** (vedi **Ciclo Solare** più avanti).

Calendario Gregoriano

Purtroppo con il passar dei secoli ci si rese conto che l'**Anno Giuliano** portava lentamente ma inesorabilmente ad un anticipo dell'inizio della primavera in quanto l'**Anno Tropic** superava quello **Civile** di una quantità leggermente inferiore al quarto di giorno, per cui la correzione di un quarto (o un giorno ogni quattro anni) apportata dai tempi di **Cesare** fino al **1582 d.C.** risultò essere eccessiva, determinando una variazione globale di **14 giorni** sul ritorno effettivo del **Sole** all'equinozio di primavera che avveniva a quei tempi il **25 marzo**.

Infatti la primavera del **1582 iniziò l'11 marzo** invece del consueto **21 marzo** stabilito successivamente nel **Concilio di Nicea del 325 d.C.**. Per questa ragione **Papa Gregorio XIII** diede l'incarico all'astronomo **Aloisius Lilius** di riformare il calendario, per riportare l'inizio della primavera al **21 Marzo**, come avveniva per definizione dal tempo del **Concilio di Nicea** e anche per avere la data della Pasqua sempre alla prima domenica dopo il plenilunio di primavera.

Pertanto **Lilius** sopprime **10 giorni** senza alterare la successione dei giorni della settimana, portando così la data dal **4 Ottobre 1582 (giovedì)** al **15 Ottobre dello stesso anno (venerdì)**; inoltre si prese cura che in futuro non si dovessero più verificare correzioni del genere. A tal uopo la questione venne risolta **non considerando bisestili gli anni secolari**, eccettuati quelli le cui prime due cifre fossero divisibili per quattro (**1600, 2000, 2400 ecc.**).

In questa maniera si hanno, in un periodo di **400 anni**, **303 anni di 365 giorni e 97 bisestili di 366 giorni** che portano ad un valore medio per anno di **365,2425** giorni, molto vicino a quello **Tropic**.

Infatti dalla differenza tra la durata dell'**Anno Civile Medio** con quello **Tropic** si ha:

$$\text{Anno Civile Medio} - \text{Anno Tropic} = 365^d,2425 - 365^d,24219878 = 0^d,0003013$$

cioè una differenza di **3 giorni circa ogni 10.000 anni** con un conseguente anticipo sulla data di inizio della primavera, che ai fini pratici può considerarsi trascurabile.

A causa della disparità della lunghezza dei mesi in un anno, che vanno dai **28 giorni ai 31**, da anni si sta discutendo una riforma del calendario che ripartisca in modo più adeguato la durata di ogni mese, in maniera tale da avere ad esempio tutti i trimestri di **91 giorni**, inizianti di domenica e costituiti sequenzialmente da mesi di **31, 30, 30** rispettivamente. Poiché con questa ripartizione si avrebbero solo **364 giorni al posto di 365**, si introdurrebbe allora un giorno bianco alla fine di ogni anno per

uniformarsi all'anno civile che tuttora adottiamo. Negli anni bisestili, invece, si introdurrebbe un secondo giorno bianco alla fine del primo semestre.

Con questa riforma la data della **Pasqua**, verrebbe fissata sempre alla seconda domenica di Aprile e non più a date variabili dipendenti dalla prima domenica successiva al plenilunio di primavera. Ricordiamo inoltre che per differenti cause la data attuale della Pasqua non può capitare **prima del 22 Marzo e non dopo il 25 Aprile**. Queste due date estreme vengono comunemente chiamate **Pasqua Bassa** come ad esempio quella del **22 Marzo 1818 e del 2285** e **Pasqua Alta** come quella del **25 Aprile 1886, del 1943 e del 2038**).

Quando occorre riferire le posizioni medie delle **Stelle** ad una certa epoca, generalmente si ricorre all'utilizzo **dell'Anno Besseliano o Giuliano**.

Per definizione la durata di un **Anno Besseliano** è convenzionalmente la durata dell' **Anno Tropic**o **1900** di **365,242198781** giorni di **31.556.925,9747** secondi di **Tempo delle Effemeridi (TE)** (vedi avanti). Questo anno ha inizio quando l'**Ascensione Retta del Sole Medio Fittizio**, affetta da aberrazione, e misurata dall'equinozio, è **18^h 40^m**. A causa dell'eccesso della variazione secolare dell'**Ascensione Retta del Sole Medio Fittizio** rispetto alla longitudine media del **Sole**, l'**Anno Besseliano** si accorcia rispetto a quello **Tropic**o di **0,00148** secondi all'anno a partire dal **1900**. Tuttavia data l'esigua differenza tra questi due tipi di anno si possono ragionevolmente considerare i due anni uguali e stabilire l'inizio **dell'Anno Besseliano** quando la **Longitudine Media del Sole** riportata qui di seguito è di **280°** esatti:

$$\lambda = 279^\circ,696678 + 0^\circ,9856473354 \cdot d + 0^\circ,00002267 \cdot D^2$$

dove con (*d*) si sta ad indicare il numero di giorni (e frazioni di giorno) delle effemeridi trascorsi dal **0 gennaio 1900 alle ore 12 di ET** fino alla data di osservazione, mentre **D=d/10.000**

Ovviamente questo tipo di tempo ha inizio in istanti diversi rispetto all'anno civile (di solito intorno all'1 di gennaio) a seconda dell'anno in questione. Diamo come esempio gli istanti di inizio di alcuni anni **Besseliani** ed il modo sintetico con cui si scrivono (lettera **B** seguita dall'anno).

Anno Besseliano **B1900,0 = 31 – 12 – 1899 ore 19:30:43 ET**

Anno Besseliano **B1950,0 = 31 – 12 – 1949 ore 22:09:47 ET**

Anno Besseliano **B1996,0 = 01 – 01 – 1996 ore 01:33:02 ET**

Se si vuole avere l'**Epoca Besseliana** per un istante qualunque dell'anno occorre calcolare quanti giorni, ore, minuti e secondi sono trascorsi dall'inizio dell'**Anno Besseliano** dividendo il tutto per **365,24219878** (numero di giorni in **1 Anno Tropic**o), ed aggiungendo la parte frazionaria così ottenuta all'anno considerato (es. l'**Epoca B1996,67882** corrisponde al **5 settembre 1966 ore 0 di TE**).

Analoghe considerazioni per l'inizio dell'**Anno Giuliano** che essendo costituito di **365,25 Giorni Giuliani** ed avendo inizio alle ore **12 di ET al 31 dicembre 1899** (o con altra notazione **0 Gennaio 1900**) fa sì che capiti alle ore **12 di ET il 1° gennaio 1996** e alle ore **12 di ET il 1° gennaio 2000**, mentre la notazione sintetica di questo tipo di Anno è **J1996,0** e **J2000,0** rispettivamente. Per un istante qualunque **dell'Anno Giuliano** occorre, come per l'**Anno Besseliano**, contare quanti giorni ore minuti e secondi sono trascorsi dall'inizio **dell'Anno Giuliano** dividendo per **365,25**. Il risultato di questa operazione va aggiunto al valore intero dell'Anno considerato.

Data Giuliana Convenzionale e Modificata

A prescindere dall'inizio degli **Anni Besselliano e Giuliano**, nei calcoli che occorre fare per trasformare le coordinate astronomiche da un'epoca all'altra o per riferire una osservazione astronomica ad un certo tempo, solitamente si fa ricorso alla **Data Giuliana (JD)**, cioè al conteggio del numero di giorni trascorsi da una lontana epoca del passato.

Questo sistema di datazione ideato da **Giuseppe Scaligero nel 1583 d.C.**, non ha niente a che vedere con l'**Anno Giuliano**, ma è stata chiamata così in onore di suo padre, che si chiamava **Giulio Cesare Scaligero**, il quale era un insigne matematico dell'epoca.

L'idea di **Scaligero** figlio fu quella di contare progressivamente i giorni civili dell'**Anno Giuliano** a partire dall'inizio del giorno (mezzogiorno) **del 1° di gennaio del 4.713 a.C.**, o in tempi recenti dalle **ore 12 di TE**, accumulandoli per **7980 anni** con giorni dell'**Anno Giuliano** fino al **4 ottobre 1582** e con giorni dell'**Anno Gregoriano** dal **15 ottobre del 1582** in poi (vedi sopra).

La ragione per cui la **Data Giuliana** si dovrebbe azzerare ogni **7980 anni** ha le sue radici profonde nel passato ed è da ricollegarsi al **Ciclo Lunare di 19 anni**, a quello **Solare di 28 e di Indizione Romana di 15**, nel senso che se ad una certa epoca questi **3 Cicli** coincidono, dopo $19 \times 28 \times 15 = 7980$ **anni** gli inizi dei cicli saranno nuovamente coincidenti. Questo periodo di tempo così lungo venne chiamato da **Scaligero "Periodo Giuliano"**

Ricordiamo che i singoli cicli sopra citati venivano numerati da **1 a 19** per il **Ciclo di Metone o Lunare**, da **1 a 28** per quello **Solare** e da **1 a 15** per quello dell'**Indizione Romana**. Quindi al **1° Gennaio del 4713 a.C.** tutti e tre i cicli erano al loro primo anno:

$$1^\circ \text{ Anno Ciclo Lunare} = 1^\circ \text{ Anno Ciclo Solare} = 1^\circ \text{ Anno Indizione Romana} = \text{Anno } 4.713 \text{ a.C.}$$

La domanda che ci si pone ora è la seguente: perché l'inizio dei cicli è avvenuto nel **4.713 a.C.** e non in un altro anno?

La spiegazione è da ricercarsi nel fatto che il **1° Ciclo Solare** è stato riferito dai cronologi all'anno **9 a.C.**, mentre il **1° anno dell'Indizione Romana**, in un primo tempo fissato con l'anno **3 a.C.**, fu spostato all'anno **313 d.C.**, da **Papa Gregorio VII (1020 – 1085 d.C.)** ed infine il **1° Ciclo Lunare** fu fissato all'anno **1 a.C.**. Quindi, andando indietro nel tempo, partendo dalle date dei tre cicli, con multipli dei cicli stessi, si arriva all'anno **4713 a.C.** come è sinteticamente riportato nelle righe seguenti:

335 Cicli Indizione Romana	<i>x</i>	15 anni	- 313 d.C. +1	=	4713 a.C.
314 Cicli Indizione Romana	<i>x</i>	15 anni	+ 3 a.C.	=	4713 a.C.
248 Cicli Lunari	<i>x</i>	19 anni	+ 1 a.C.	=	4713 a.C.
168 Cicli Solari	<i>x</i>	28 anni	+ 9 a.C.	=	4713 a.C.

Per una completa comprensione della **Data Giuliana** occorre capire che cosa significavano esattamente questi 3 cicli.

Il **Ciclo Lunare** o **Ciclo di Metone** è stato scoperto appunto dall'astronomo ateniese **Metone** nel V secolo **a.C.**, il quale si rese conto che **235 mesi Lunari o sinodici medi di 29^d 12^h 44^m 03^s** (corrispondenti al ripetersi consecutivo dei noviluni) erano quasi paragonabili a **19 Anni Solari**, il che riportava le fasi della **Luna** a ripetersi con continuità negli stessi giorni del corso dell'anno ogni **19 anni**. Gli anni di questo ciclo venivano indicati con un numero romano da **I a XIX**, chiamato anche **Numero d'Oro**.

Il Ciclo Solare, invece è un **ciclo di 28 anni**, in quanto ogni **28 anni** i giorni della settimana tornano a corrispondere con i giorni del mese (es. il 1 gennaio capita di martedì nel 2000, nel 2028 e così via). Questa regola era rigorosa con il **Calendario Giuliano** in quanto ogni 4 anni c'era un anno bisestile. Ora, con il **Calendario Gregoriano**, se il periodo dei 28 anni si prende a cavallo degli anni secolari 1700, 1800 e 1900 che non sono bisestili la regola non è più valida in quanto si ha uno sfasamento di un giorno.

L'Indizione Romana non ha una origine astronomica e non deriva dalla Roma antica ma dalla Roma del Medioevo. Il suo uso incominciò nel IV secolo d.C. per indicare le date in atti pubblici ma la sua origine risale agli ordinamenti per l'esazione delle imposte fondiari al tempo degli imperatori romani.

Da tutto quanto sopra esposto si deduce che al **31 dicembre 1899 alle ore 12 di ET erano trascorsi esattamente 2.415.020,0 giorni esatti dal 1° Gennaio dal 4.713 a.C.**

In questi ultimi tempi, per comodità, si è introdotta la **Data Giuliana Modificata (MJD)** che si ottiene semplicemente togliendo **alla Data Giuliana Convenzionale (JD)**, la quantità **2.400.000,5** come nell'esempio seguente:

$$MJD \quad \text{del 31 dicembre 1899} \quad \text{ore } 12^h \text{ } 00^m \text{ } 00^s \text{ ET} = JD - 2.400.000,5 = 15.019,5$$

$$MJD \quad \text{del 1° Gennaio 2000} \quad \text{ore } 12^h \text{ } 00^m \text{ } 00^s \text{ ET} = JD - 2.400.000,5 = 51.544,5$$

Conoscendo la **MJD** in un certo istante dell'anno è possibile trovare le corrispondenti **Epoche Giuliane e Besseliene** con le seguenti semplici formule (**Explanatory Supplement, 1992**):

$$Epoca Giuliana = J[2000,0 + (MJD + 2.400.000,5 - 2.451.450,0)/365,25]$$

$$Epoca Besseliene = B[1900,0 + (MJD + 2.400.000,5 - 2.415.020,313 52)/365,242 198 878 1]$$

Val la pena sottolineare che la **Data Giuliana** è svincolata dal tipo di Anno che si considera (**Giuliano o Besseliene**), in quanto questi ne determinano solo l'inizio, per cui la **Data Giuliana**, essendo costituita da giorni civili di 24 ore identifica univocamente l'istante in cui è avvenuto o avverrà un certo fenomeno.

Tempo Universale

Avendo definito nelle pagine precedenti tutti (o quasi) i moti posseduti dalla **Terra**, nonché le varie unità di tempo (tipi di **Giorno** e di **Anno**), abbiamo ora gli elementi per affrontare le innumerevoli definizioni moderne delle **Scale di Tempo** che, come sappiamo, si sono evolute e modificate con il passar degli anni grazie all'ausilio degli orologi atomici e dei satelliti artificiali.

Pertanto per analizzare organicamente le varie **Scale di Tempo** ad oggi note occorre al solito risalire indietro nel tempo e cioè al **20 Maggio del 1875**, anno in cui alla **Convenzione del Metro di Sèvres** si definì il **Giorno Solare Medio** come l'intervallo di tempo tra due passaggi consecutivi nello stesso punto del meridiano del **Sole Medio Fittizio**. Contemporaneamente si stabilì che il **Secondo di Tempo** fosse la **86400-esima parte** di questo tipo di Giorno. Come Meridiano di riferimento per la costruzione della relativa **Scala di Tempo** fu scelto il **Meridiano di Greenwich** e il

tempo ad esso associato fu chiamato **Tempo Medio di Greenwich (GMT)** con inizio del Giorno a mezzogiorno.

Nel **1925** l'**Unione Astronomica Internazionale (IAU)** spostò l'inizio del **Giorno Solare** da mezzogiorno a mezzanotte, come già accennato precedentemente, rendendo così uguale l' inizio del **Giorno Astronomico** con quello **Civile**. La **Scala di Tempo** associata a questa nuova impostazione del giorno venne chiamata **Tempo Universale (UT)**, nel senso che un dato evento astronomico deve essere riferito ad un unico tempo (universale) indipendentemente dal luogo della **Terra** in cui viene osservato.

Il **Tempo Universale** può essere anche considerato come l'angolo orario del **Sole Medio Fittizio o Universale** aumentato di 12 ore.

Questo tempo coincide con il tempo civile di zona pertinente al fuso orario in cui il suo meridiano centrale passa per **Greenwich**.

Quando ci si rese conto che il polo terrestre si spostava sulla superficie terrestre per effetto della **Polodia** (trattata precedentemente), il nome del **Tempo Scala** genericamente chiamato **UT** venne rinominato **UT0** ed al tempo stesso fu introdotto un nuovo tempo chiamato **UT1** che teneva conto del **Moto del Polo**. Con la correzione da **UT0** a **UT1** si rendono tutte le località della **Terra** riferite a meridiani confluenti in un unico polo medio di figura e non in un **polo istantaneo** variabile nel corso del tempo.

Per quantificare lo scostamento delle longitudini e latitudini istantanee delle località rispetto a quelle riferite ad un polo medio e di conseguenza per valutare le correzioni da apportare al tempo **UT0** (osservato) per arrivare al tempo **UT1** purgato del moto polare, occorre analizzare dapprima la **Figura 47**.

Se con **Z** indichiamo lo **Zenith geografico**, supposto coincidente con lo **Zenith astronomico**, di una località della **Terra**, ne segue che, per quanto detto prima sulla **Polodia**, questo punto sarà fisso in cielo mentre il **polo medio di figura** P_0 si proietterà in cielo in differenti punti **P** distanti mediamente $0'',3$ (circa 7 metri sulla superficie terrestre) **polo istantaneo terrestre**.

Poiché l'**U.S. Naval Observatory** di Washington dirama periodicamente i **Bollettini IERS** (vedi **Tabella 4**) con le previsioni del **Moto del Polo** giorno per giorno, in coordinate cartesiane **x** e **y** del punto **P** rispetto a P_0 , tramite questi valori è possibile risalire alla variazione di latitudine ($d\varphi$) e di longitudine ($d\lambda$) di un qualsiasi luogo della **Terra** conoscendo semplicemente le coordinate geografiche nominali dei suddetti luoghi.

Avendo quindi calcolato le variazioni di longitudine ($d\lambda$) ed avendo inoltre le osservazioni riferite alla scala di tempo **UT0** è possibile calcolare l'**UT1** aggiungendo o sottraendo il ($d\lambda$) opportunamente trasformato in secondi di tempo.

Ma vediamo ora come si arriva a questi risultati.

Dalla **Figura 47** si osserva che $P_0Z = 90^\circ - \varphi_0$ mentre $PZ = 90^\circ - \varphi$. Se dal punto **P** si traccia un arco di cerchio parallelo al piano orizzontale fino ad incontrare il meridiano P_0Z in **Q** si crea un triangolo sferico con angolo retto in **Q** che può essere approssimato con un triangolo rettangolo piano in quanto gli spostamenti di **P** rispetto a P_0 sono di pochi decimi di secondo d'arco. Pertanto considerando il triangolo PQP_0 di **Figura 47** si osserva che $\angle P P_0 Q = \gamma$, che il meridiano di riferimento del luogo passante per P_0Z ha longitudine λ_0 , e che il meridiano istantaneo dello stesso luogo ad un istante **t** passante per $P P_0$ ha longitudine Γ . Da queste quantità si deriva che $(d\varphi) = \angle P_0 Q = \varphi - \varphi_0$ per cui si ha dal triangolo PQP_0

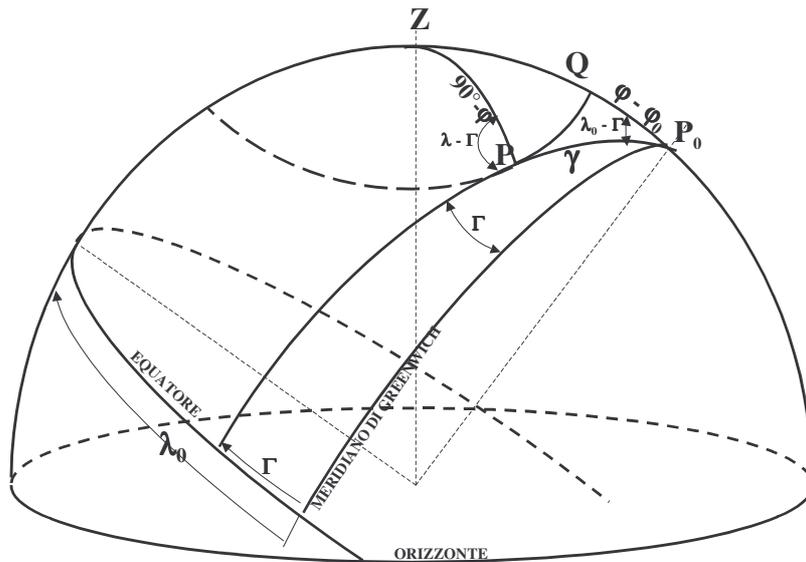


Fig. 47

$$d\phi = \gamma \cdot \cos(\lambda_0 - \Gamma) d\phi \tag{1'}$$

Poiché la longitudine del meridiano passante per PZ con polo in P può essere approssimata a $(\lambda - \Gamma)$, l'angolo P_0PZ sarà : $180^\circ - (\lambda - \Gamma)$.

Sapendo inoltre che lo spostamento di P intorno a P_0 viene di solito espresso in coordinate cartesiane (x positiva verso il meridiano di longitudine 0° , y positiva a longitudine 270° Est), queste possono essere rappresentate in funzione delle coordinate polari come:

$$x = \gamma \cdot \cos \Gamma \tag{2'}$$

$$y = -\gamma \cdot \sin \Gamma \tag{3'}$$

Tabella 4

```

.....
*
* IERS BULLETIN - A *
*
* Rapid Service/Prediction of Earth Orientation *
*
* 30 May 2002 Vol. XV No. 43
*
* No leap second will be introduced *
* in UTC on 30 June 2002. *
*
.....
COMBINED EARTH ORIENTATION PARAMETERS:

IERS Rapid Service
MJD x error y error UT1-UTC error
+ + + + +
2 5 29 52423 .14907 .00003 .53139 .00004 -.231004 .000018
2 5 30 52424 .15176 .00003 .53001 .00004 -.231107 .000018

.....
PREDICTIONS:
The following formulas will not reproduce the predictions given below,
but may be used to extend the predictions beyond the end of this table.

x = .0356 + .0469 cos A + .0906 sin A + .0810 cos C + .1129 sin C
y = -.3286 + .0809 cos A - .0393 sin A + .1129 cos C - .0810 sin C
UT1-UTC = -.1952 - .00053 (MJD - 52429) - (UT2-UT1)

where A = 2*pi*(MJD-52424)/365.25 and C = 2*pi*(MJD-52424)/435.

TAI-UTC(MJD 52425) = 32.0
The accuracy may be estimated from the expressions:
S_x,y = 0.0042 (MJD-52424)**0.28 S_t = 0.0003 (MJD-52429)**0.75
Estimated accuracies are: Predictions 10 d 20 d 30 d 40 d
Polar coord's 0.004 0.006 0.009 0.011
UT1-UTC 0.0017 0.0028 0.0039 0.0048

MJD x(arcsec) y(arcsec) UT1-UTC(sec)
2002 5 31 52425 0.1547 0.5286 -0.23127
2002 6 1 52426 0.1576 0.5270 -0.23152
2002 6 2 52427 0.1606 0.5253 -0.23186
2002 6 3 52428 0.1636 0.5234 -0.23228
2002 6 4 52429 0.1667 0.5215 -0.23278
2002 6 5 52430 0.1697 0.5195 -0.23334
2002 6 6 52431 0.1728 0.5174 -0.23392
2002 6 7 52432 0.1758 0.5153 -0.23447

```

Pertanto dalle formule di trigonometria sferica applicate al triangolo sferico P_0PZ si ha:

$$-\cos \gamma \cdot \cos(\lambda - \Gamma) = \sin \gamma \cdot \tan \varphi - \sin(\lambda - \Gamma) \cdot \cot(\lambda_0 - \Gamma) \quad (4')$$

Poiché γ è un angolo piccolo l'espressione precedente si può scrivere:

$$\gamma \cdot \tan \varphi \cdot \sin(\lambda_0 - \Gamma) = \sin(\lambda - \Gamma) \cdot \cos(\lambda_0 - \Gamma) - \cos(\lambda - \Gamma) \cdot \sin(\lambda_0 - \Gamma) \quad (5')$$

Approssimando e semplificando ulteriormente si ha:

$$d\lambda = \lambda - \lambda_0 = \gamma \cdot \tan \varphi \cdot \sin(\lambda_0 - \Gamma) \quad (6')$$

Sostituendo i valori delle equazioni (2) e (3) nelle equazioni espanse (1) e (6) si ha:

$$\varphi = \varphi_0 + x \cdot \cos \lambda_0 - y \cdot \sin \lambda_0 \quad (7')$$

$$\lambda = \lambda_0 + (x \cdot \sin \lambda_0 + y \cdot \cos \lambda_0) \cdot \tan \varphi_0 \quad (8')$$

A questo punto è facile effettuare il passaggio da $UT0$ a $UT1$ in quanto avendo la longitudine λ_0 e la latitudine φ_0 della località, tramite le coordinate x, y ad una certa epoca t , diramate dai Bollettini IERS e trasformate in secondi di tempo, si arriva per mezzo dell'equazione (8) al valore $UT1$ partendo da quello osservato $UT0$ ottenuto dal passaggio in meridiano di una **Stella**:

$$UT1 = UT0 - \left(\frac{x''}{15''} \cdot \sin \lambda_0 + \frac{y''}{15''} \cdot \cos \lambda_0 \right) \cdot \tan \varphi_0 \quad (9')$$

Con $UT1$ si avrebbe il vero periodo rotazionale della **Terra** se questa non avesse delle variazioni stagionali e secolari.

Infatti come detto in precedenza nel **1937** venne messa in evidenza una variazione periodica stagionale della rotazione terrestre con 2 periodicità sovrapposte di 1 anno e di mezzo anno rispettivamente, che modificano l' $UT1$ di $\pm 0^s,03$.

Poiché queste variazioni al giorno d'oggi sono ben note, grazie alle precise registrazioni con orologi atomici del passaggio delle **Stelle** in meridiano, **Markowitz** intorno agli anni '60 modellizzò le variazioni stagionali con una formula empirica che permise di valutare le correzioni da apportare al tempo $UT1$ per un qualsiasi istante. In altri termini con questa formulazione si identificò un nuovo tempo chiamato $UT2$ che oltre ad essere purgato del **Moto del Polo** prende anche in considerazione le variazioni stagionali della **Terra**. La formula adottata è la seguente:

$$UT2 = UT1 + a \cdot \sin 2\pi t + b \cdot \cos 2\pi t + c \cdot \sin 4\pi t + d \cdot \cos 4\pi t \quad (10')$$

Dove: $a = +0^s,022$; $b = -0^s,012$; $c = -0^s,006$; $d = +0^s,007$; sono coefficienti empirici dedotti da molte osservazioni, mentre

$$t = 2000,0 + (MJD - 51.544,03) / 365,242,2$$

è la frazione dell'**Anno Tropic**o dall'inizio dell'**Anno Besseli**ano dove con MJD si indica la **Data Giuliana Modificata**. Contrariamente alle correzioni per il **Moto del Polo** le correzioni dovute a variazioni stagionali sono le stesse per qualsiasi luogo della **Terra**.

Tuttavia questa **Scala di Tempo** non fu lungamente usata perché ci si rese conto che esistevano ancora altre fluttuazioni accidentali e secolari nel moto di rotazione terrestre.

Tempo delle Effemeridi

Poiché la rotazione terrestre non poteva essere più considerata attendibile, per le considerazioni di cui sopra, nel mondo astronomico, intorno agli anni '60 sorse la necessità di avere una **Scala di Tempo** decisamente più affidabile. Infatti, nella **“Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure”** (CGPM) del **1956** si introdusse un nuovo **Tempo Scala Dinamico** basato sulla rivoluzione della **Terra** intorno al **Sole**, che come abbiamo visto prima è molto più stabile della rotazione assiale terrestre. Ricordiamo che ben **400 milioni di anni fa (periodo Devoniano)** l'**Anno Siderale** doveva essere più corto di **solo 10^h 34^m** rispetto alla durata attuale (un millesimo di anno più corto). Pertanto se il periodo di rivoluzione si fosse mantenuto costante da quei tempi ad oggi la **Terra** avrebbe compiuto nello stesso tempo circa **241 mila rivoluzioni (anni) in più** rispetto ai **400 milioni di rivoluzioni** ipotizzati teoricamente, secondo la seguente relazione:

$$\Delta T = 0^d,00000011 \cdot 4.000.000 \cdot \frac{400.000.000}{2} = 88.000.000 \text{ giorni} = 240.936 \text{ anni}$$

dove **0^d,000 000 11** è il rallentamento secolare del periodo di rivoluzione della **Terra**

Viceversa se la **Terra** nel suo moto di rotazione attorno al proprio asse avesse mantenuto un rallentamento costante della durata del giorno di **0,001 6 secondi per secolo**, nel periodo Devoniano la **Terra** avrebbe avuto un periodo di **22^h 13^m** per cui se tale rotazione si fosse mantenuta costante fino ai giorni nostri, la **Terra** nello stesso tempo avrebbe fatto **circa 5 miliardi e mezzo di rotazioni (giorni) in più** corrispondenti a circa **15 milioni di anni in più** rispetto ai **400 milioni di anni** previsti teoricamente secondo quest'altra relazione:

$$\Delta T = 0^s,0016 \cdot 4.000.000 \cdot \frac{\left(\frac{365,2422 \cdot 400.000.000}{2} \right)}{(365,2422 \cdot 24 \cdot 3.600)} = 14.814.814,81 \text{ anni}$$

dove **0^s,001 6** è il rallentamento secolare del periodo di rotazione giornaliero della **Terra**.

I dati forniti dalle due relazioni precedenti ci fanno capire come il periodo di rivoluzione della **Terra** sia **circa 60 volte più uniforme** di quello rotazionale terrestre.

In realtà quello che realmente si osserva con il passaggio delle **Stelle** in meridiano non è tanto il rallentamento secolare della **Terra** che, pur essendo più macroscopico di quello dovuto alla rivoluzione della **Terra** intorno al **Sole** risulta ancora contenuto, quanto le variazioni accidentali del moto di rotazione terrestre che, come abbiamo detto precedentemente, concorrono con le altre variazioni stagionali e secolari a far sì che attualmente il nostro pianeta rallenti la sua rotazione diurna di circa un secondo di tempo all'anno.

Pertanto si definì come **Unità di Tempo** primaria invariabile del **Tempo delle Effemeridi**, l'**Anno Tropic** all'epoca **0 Gennaio 1900 ore 12 di ET** da cui si derivò l'**Unità di Tempo** pure invariabile detta **Secondo delle Effemeridi** coincidente con il secondo di **Tempo Solare Medio** al principio del **1900**, quando l'**Anno Tropic** conteneva **31.556.925,9747 secondi**, o detto in altri termini quando la longitudine media del **Sole** a quell'epoca aveva il seguente valore (già riportato nelle righe precedenti):

$$\lambda = 279^\circ,696678 + 0^\circ,9856473354 \cdot d + 0^\circ,00002267 \cdot D^2$$

Chiaramente, se volessimo dare una definizione di “**Giorno delle Effemeridi**”, dovremmo dire che esso coincide con il **Giorno Solare Medio** dell’anno **1900**, essendo questo costituito da **86400** secondi di **Tempo delle Effemeridi**. Per cui se la **Terra** avesse mantenuto una rotazione costante attorno al proprio asse nel corso dei secoli, si avrebbe sempre avuto la culminazione del **Sole Medio** al **Meridiano di Greenwich** alle ore **12 di UT** e conseguentemente alle ore **12 di ET** .

Tuttavia, poiché la **Terra** è in continuo rallentamento, occorre definire due nuovi tipi di **Sole Medio** relativi rispettivamente a una rotazione costante e a una rotazione variabile di questa.

Si considera pertanto un **Sole Medio** , detto **Universale**, che ha la caratteristica di compensare il rallentamento progressivo della **Terra**, in maniera che culmini sempre alle ore **12 di UT** al **Meridiano di Greenwich** (ora civile segnata dagli orologi nel primo fuso orario) ; quindi si considera un altro **Sole Medio** , detto delle **Effemeridi**, che ha la caratteristica di tenere conto del rallentamento, nel senso che con il passare degli anni, alle ore **12 di UT** si trovi sempre più spostato verso Est rispetto al **Meridiano di Greenwich** . In base a quanto stabilito, si è convenuto di riferire un meridiano associato al **Sole Medio delle Effemeridi**. Questo meridiano ha la caratteristica di far culminare sempre il **Sole Medio delle Effemeridi** alle ore **12 di ET** ed inoltre di trovarsi spostato verso **Est** da **Greenwich** di una quantità angolare proporzionale alla differenza tra il **Tempo delle Effemeridi** e il **Tempo Universale**.

Poiché la differenza:

$$\Delta T = ET - UT$$

sostanzialmente dovuta al rallentamento terrestre ammontava al **1983,0** (ultimo anno in cui è rimasto in uso il **Tempo delle Effemeridi**) a $\Delta T = +52^s,96$ (**solari e non siderali**), valore che tende a crescere attualmente di circa un secondo ogni anno , ne segue che il **Meridiano delle Effemeridi** sarà spostato rispetto a quello di **Greenwich** di una quantità pari all’angolo descritto dalla rotazione terrestre in **52,96 secondi solari**.

Poiché la **Terra** compie un giro di **360°** in **24 ore siderali** , corrispondenti a $23^h 56^m 04,09$ solari medie, l’angolo descritto dalla **Terra** in **52,96** secondi solari sarà di

$$\frac{24^h}{23^h 56^m 04,09} \cdot \Delta T = 1,002738 \cdot \Delta T = 53^s,105 \text{ secondi siderali} = 13'16'',57$$

Riassumendo, possiamo dire che il **Sole Medio delle Effemeridi** culmina sempre al **Meridiano delle Effemeridi** alle ore **12 di ET**, mentre impiega ancora **53,105 secondi** (questa volta solari) per culminare al **Meridiano di Greenwich** e quindi alle $12^h 00^m 53^s,105$ di **ET**.

Sapendo inoltre che per ogni transito in meridiano di un astro vale la relazione:

$$UT = ET - \Delta T$$

segue che il **Sole Medio delle Effemeridi** transitando alle ore $12^h 00^m 53^s,105$ di **ET** al **Meridiano di Greenwich** avrà un **Tempo Universale** corrispondente a:

$$UT = 12^h + 1,002738 \Delta T - \Delta T = 12^h 00^m 00^s,145$$

Da queste relazioni notiamo che il **Sole Medio Universale** transitando sempre alle ore **12 di UT** a **Greenwich**, ha un anticipo di $0,002738 \cdot \Delta T = 0,145$ secondi sul **Sole Medio delle Effemeridi** , quantità che in prima approssimazione rende praticamente coincidenti i due tipi di **Sole Medio**.

Per meglio visualizzare i tempi dei transiti del **Sole Medio Universale** e delle **Effemeridi** relativamente ai **Meridiani di Greenwich e delle Effemeridi** ci possiamo servire della seguente **Figura 48** in cui gli istanti sono espressi sia in **ET** che in **UT**.

Data la maggior uniformità del **Tempo delle Effemeridi** rispetto al **Tempo Universale** questo tipo di **Tempo Dinamico** è stato utilizzato dal **1960** fino al **1983** per scopi puramente astronomici, cioè mirato al calcolo della posizione degli astri in cielo i cui moti orbitali seguendo le leggi della teoria gravitazionale sono ancorati ad una scala di tempo uniforme. Dal punto di vista pratico l'**ET** si ricava dal confronto della posizione osservata di un pianeta con quella calcolata .

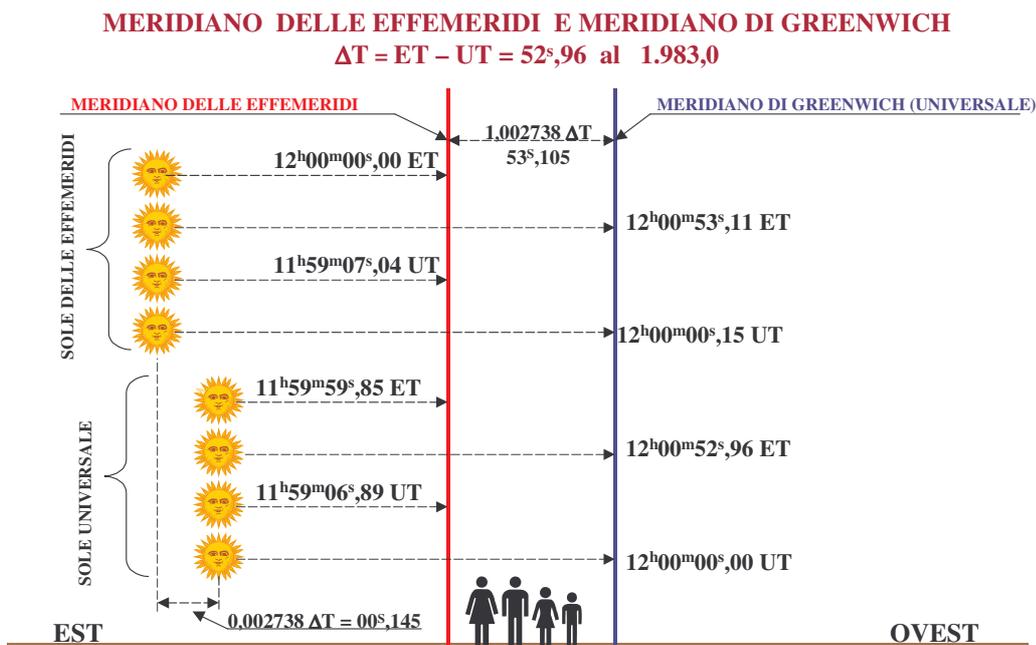


Fig. 48

Tempo Atomico Internazionale

Purtroppo anche il **Tempo delle Effemeridi** si è rivelato poco attendibile, in quanto con l'avvento degli orologi atomici negli anni '60 (vedi **Figura 48**) si vide che anche il periodo di rivoluzione della **Terra** intorno al **Sole** non era rigorosamente costante.

Pertanto, nel **1971** la **Conferenza Generale dei Pesì e delle Misure** introdusse una nuova **Scala di Tempo**: Il **Tempo Atomico Internazionale (TAI)** a cui fu associata una nuova **Unità di Tempo** e cioè il **Secondo di Tempo Atomico**, che nella definizione data nel **Sistema Internazionale (SI)** corrisponde a **9.192.631.770** periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di **Cesio 133** (transizione per emissione stimolata dalla frequenza di risonanza di un campo elettromagnetico, in una cavità, dal livello F=4 al livello F=3).

Quindi, per la prima volta nella storia dell'uomo, il tempo non fu più legato a fenomeni di tipo astronomico bensì a fenomeni fisici dello stato della materia. L'importanza degli orologi atomici sta nel fatto che sono molto stabili nel tempo e poco sensibili alle influenze esterne. Inoltre sono assoluti, nel senso che sono un campione di frequenza immutabile valido per ogni orologio posto in qualsiasi luogo dello spazio ed in qualsiasi tempo. Invece, gli orologi al quarzo, predecessori di quelli al Cesio, anche se più precisi della rotazione terrestre non sono né assoluti né tanto meno stabili nel tempo, in

quanto la loro frequenza varia da un quarzo all'altro e soprattutto, nello stesso cristallo, la loro frequenza non è costante nel tempo.

Un'altra conseguenza importante che si verificò con l'avvento degli orologi atomici é che di questi se ne potevano avere molti e sparsi in tutto il mondo, mentre l'orologio **Terra** era ed é unico. Questo fatto permise di ridurre gli errori stocastici degli orologi mediando le misure di tempo con molti orologi situati in differenti laboratori. Pertanto il comune tempo di riferimento così ottenuto fu fornito per diversi anni dal sistema di navigazione terrestre, il **LORAN-C**, gestito **dall'U.S. Navy di Washington**.

Questo sistema di gestione e distribuzione del tempo è stato al giorno d'oggi soppiantato dal più moderno e accurato **Sistema di Posizione Globale (GPS)**.

Si ricorda che il **secondo (SI)** del **TAI** è stato determinato con riferimento alla **Scala di Tempo del Tempo delle Effemeridi (ET)**, per cui anche il **TAI** si é discostato dall'**UT** in modo analogo all'**ET**.

L'origine del **TAI** è stato definito per convenzione coincidente con il tempo **UT2** al **1° Gennaio 1958** alle ore **00^h 00^m 00^s,00 UT**. Questa definizione è stata formalmente rivista nel **1980** nella riunione del **Comitato Consultativo per la Definizione del Secondo** nella quale si fece l'assunzione che la **Terra** doveva essere considerata come un sistema di riferimento rotante in senso relativistico.

In questo contesto, vista la precisione raggiunta dagli orologi atomici una ventina di anni fa (dell'ordine del **centomilionesimo** di secondo al giorno), l'**IAU** introdusse **nuove Scale di Tempo**, prevalentemente per scopi astronomici, che tenessero conto degli effetti relativistici a cui sono soggette le misure su eventi che succedono nei più disparati sistemi di riferimento fissi o in moto relativo sia sulla **Terra** che nello spazio.

Lo studio del moto dei corpi celesti in un particolare sistema di riferimento e soggetti a una teoria gravitazionale richiedono la definizione di nuove scale di **Tempo Dinamico**.

Parallelamente alle nuove **Scale di Tempo Dinamico** che tratteremo tra poco, sono stati introdotti due nuovi concetti di tempo in senso relativistico:

Il Tempo Proprio

Il Tempo Coordinato

Con il termine di **Tempo Proprio** si intende il tempo che è misurato da un osservatore solidale ad sistema di riferimento (ad esempio sulla superficie terrestre) in cui l'evento viene osservato. In altre parole tutti gli eventi che si registrano con orologi atomici sulla **Terra** rappresentano misure di **Tempo Proprio** e il **Tempo Atomico** in questo contesto è una particolare forma di **Tempo Proprio**.

Il termine **Tempo Coordinato** invece, a rigore indicherebbe una quantità calcolabile ma non misurabile. Infatti, in **Relatività Generale** esso è semplicemente una delle 4 coordinate che individuano un evento nello **Spazio-Tempo**. In casi particolari però lo si può identificare come il **Tempo Proprio** di un particolare osservatore. Per esempio nella metrica di **Schwarzschild** :

$$d\tau^2 = \left(1 - 2 \cdot \frac{M}{r}\right) \cdot dt^2 + \left(1 - 2 \cdot \frac{M}{r}\right)^{-1} \cdot dr^2 + r^2 \cdot (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\phi^2)$$

il **Tempo Coordinato** t coincide con il **Tempo Proprio** τ nel caso in cui l'osservatore sia supposto fermo ($d\mathbf{r}, d\theta, d\phi = 0$) e all'infinito ($r \rightarrow \infty$).

Con il termine di **Tempo Coordinato** si intende il tempo che viene registrato su di un sistema di riferimento in movimento relativo rispetto al sistema di riferimento (supposto fisso e isolato nello spazio) in cui si osserva l'evento.

Come si è potuto capire i **Sistemi di Riferimento Inerziali** e la **Teoria della Relatività Ristretta e Generale** a questo punto sono diventati parte essenziale nella misurazione di eventi astronomici, per cui è opportuno spendere due parole su questo argomento.

Cenni di Relatività Ristretta e Generale

Quando si parla di sistema di riferimento inerziale si intende un ambiente rigido come ad esempio un laboratorio, fisso o in moto relativo uniforme rispetto allo spazio esterno, entro cui si osservano e si misurano determinati eventi. All'interno del sistema inerziale si possono stabilire differenti sistemi di coordinate che tuttavia non modificano la natura dell'evento od oggetto misurato. In altri termini, la distanza tra due punti materiali in un sistema di riferimento inerziale resta inalterata a prescindere dal sistema di coordinate cartesiane utilizzato.

La **Teoria della Relatività**, nata praticamente nel XVII secolo con **Galileo Galilei**, si basa sul confronto di eventi osservati da differenti sistemi di riferimento inerziali, il cui principio fondamentale, messo in una forma più moderna, può sintetizzarsi sostanzialmente nei due seguenti punti:

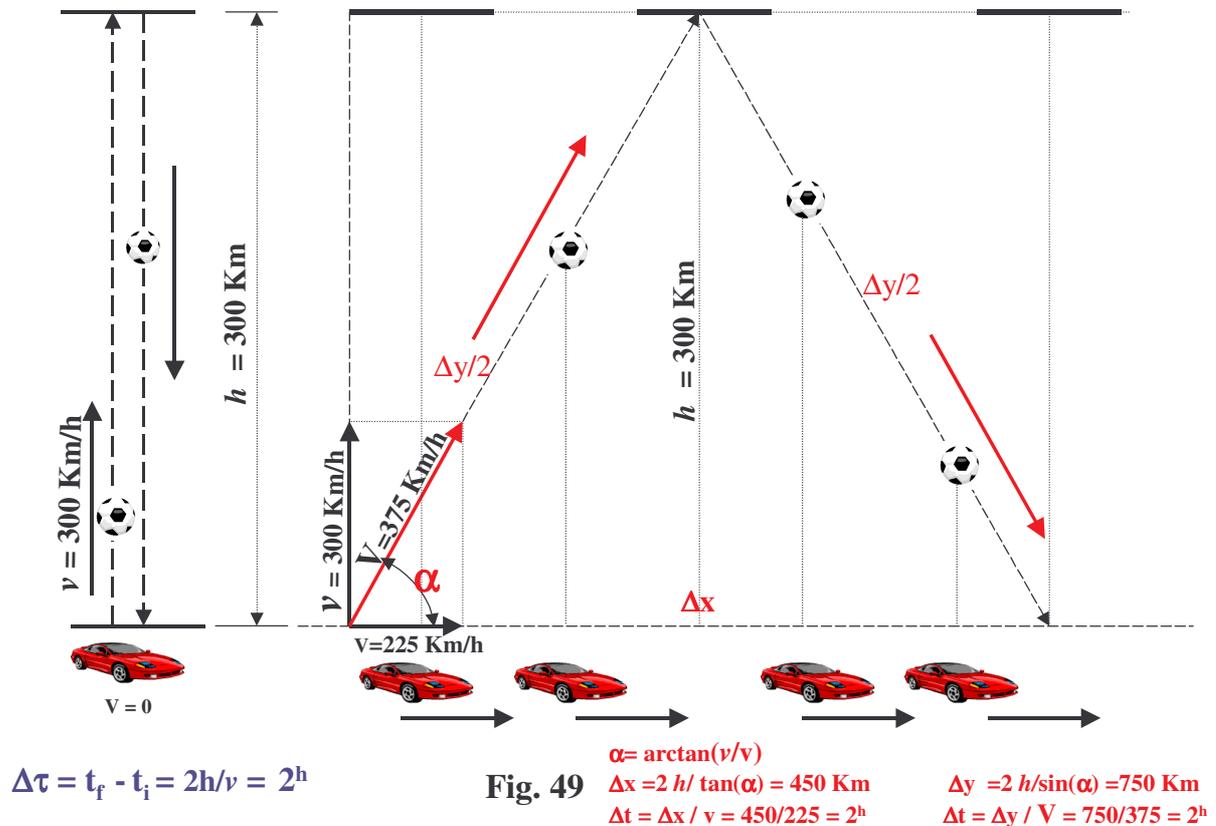
- Nessun esperimento è in grado di distinguere due riferimenti inerziali in moto traslatorio rettilineo uniforme
- Tutte le leggi che descrivono i fenomeni fisici in un riferimento inerziale sono ancora valide anche in altri riferimenti inerziali

Questo principio, detto **Principio di Relatività**, apparentemente valido solo in meccanica classica, prima dell'avvento della moderna **Teoria della Relatività**, è stato successivamente confermato anche per l'elettromagnetismo grazie alla sensazionale intuizione di **Einstein** secondo cui la velocità della luce, o più genericamente della radiazione elettromagnetica, viaggia con una ben determinata velocità ($c = 299.792,458 \text{ Km/s nel vuoto}$) in qualsiasi sistema di riferimento venga prodotta e da qualsiasi sistema di riferimento venga osservata.

Questo concetto ha avuto delle ripercussioni notevoli sulla formulazione della **Relatività Ristretta**, in particolar modo nella nuova concezione di **Spazio e di Tempo**.

Infatti, come è noto dalla meccanica classica newtoniana, il tempo osservato per il verificarsi di un certo evento in un sistema di riferimento è lo stesso di quello osservato da un altro sistema in moto rettilineo uniforme. Come esempio classico immaginiamo di avere a disposizione un'automobile sportiva che viaggi su di una autostrada alla velocità costante di **225 Km/h**. Ora supponiamo idealmente che il pilota lanci dal finestrino un pallone ad una velocità costante di **300 Km/h** in direzione perpendicolare al moto dell'automobile e che questo pallone dopo aver percorso **300 Km** rimbalzi su un muro che si muove alla stessa velocità e nella stessa direzione dell'auto (vedi **Figura 49**). Ovviamente, trascurando gli attriti e l'attrazione gravitazionale, il pallone dopo essere rimbalzato sul muro ritornerebbe indietro verso l'automobile, sempre con la stessa velocità di **300 Km/h**. Orbene se noi osservassimo il fenomeno stando all'interno dell'automobile, potremmo innanzitutto non renderci conto di viaggiare a **225 Km/h** (se supponiamo di non vedere il paesaggio esterno, di non sentire le vibrazioni dell'auto o il rumore del motore ecc.) ed in secondo luogo vedremmo il pallone prima allontanarsi e poi avvicinarsi a noi longitudinalmente sempre alla stessa velocità in un tempo complessivo di **2 ore** (un'ora per l'andata e un'altra ora, dopo il rimbalzo, per il ritorno) come è chiaramente sintetizzato nell'immagine di sinistra della **Figura 49**.

MECCANICA CLASSICA NEWTONIANA



Se lo stesso fenomeno lo si osservasse stando a **Terra** (supponendo erroneamente che la **Terra** sia un riferimento inerziale) si noterebbe che l'auto effettivamente si muove sull'autostrada a **225 Km/h**, mentre il pallone lo si vedrebbe percorrere un tragitto obliquo con una velocità reale di **375 Km/h**, che è data dalla composizione vettoriale della velocità dell'auto e del pallone ($D = (225^2 + 300^2)^{1/2} = 375 \text{ km/h}$).

Dopo il rimbalzo sul muro il pallone ritornerebbe in maniera obliqua verso l'automobile che corre sull'autostrada, con il risultato finale di vedere ritornare il pallone nell'auto dopo **due ore** esatte. Infatti come è possibile vedere dall'immagine di destra della **Figura 49**, i **450 Km** percorsi dall'auto a **225 km/h** richiedono lo stesso tempo impiegato dal pallone a percorrere il percorso obliquo di **750 Km** a **375 Km/h** e cioè **due ore**. Quindi i tempi registrati sul sistema inerziale dell'auto sono equivalenti ai tempi registrati sul sistema inerziale a **Terra**. Da questo esperimento si dedurrebbe che lo spazio e il tempo dovrebbero essere assoluti, cioè indipendenti dal sistema di riferimento considerato. In realtà questo principio rimane valido solo se le velocità in gioco sono piccole rispetto alla velocità della luce.

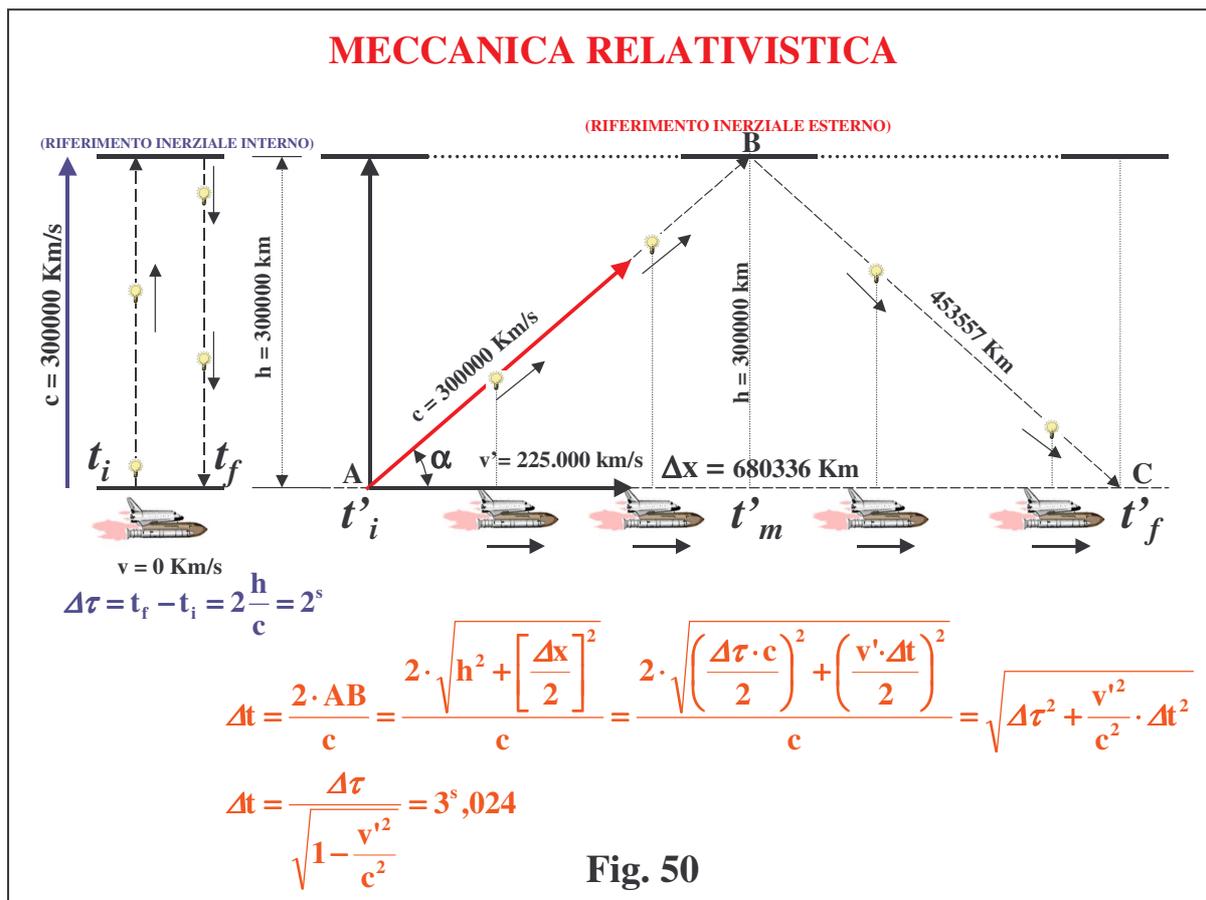
Vediamo ora cosa succede quando gli oggetti si muovono a velocità vicine a quella della luce.

A questo proposito supponiamo di considerare un esperimento analogo al precedente dove al posto dell'auto abbiamo un'astronave ideale che viaggia a **225.000 Km/s** e al posto del pallone un fotone che viaggia alla velocità della luce. Analogamente al caso precedente, questo fotone giunto a **300.000 Km** di distanza viene riflesso da uno specchio che si muove parallelamente all'astronave alla sua stessa velocità.

Orbene, il tempo registrato tra la partenza e l'arrivo del fotone sull'astronave risultano diversi a seconda che il sistema di riferimento inerziale sia la **Terra** o l'astronave.

Analizzando la **Figura 50** si nota che nel caso dell'osservazione del fenomeno dal sistema solidale con l'astronave (immagine a sinistra della figura) il fotone di luce sembra allontanarsi perpendicolarmente rispetto al moto dell'astronave, per essere riflesso dallo specchio a **300.000 Km** dopo un secondo e quindi ritornare sull'astronave in un tempo complessivo di **2 secondi**, in accordo con la seguente relazione:

$$\Delta\tau = t_f' - t_i' = \frac{2 \cdot h}{c} = 2^s$$



dove $\Delta\tau$ è l'intervallo di tempo registrato tra partenza (t_i) e arrivo (t_f) del fotone , h la distanza astronave-specchio e c la velocità della luce

La situazione, invece, cambierebbe se osservassimo l'evento da un riferimento esterno (sulla **Terra** per esempio). In questo caso vedremmo che il fotone percorrerebbe un tragitto obliquo fino allo specchio e da questo indietro fino all'astronave in un tempo più lungo (vedi immagine a destra della **Figura 50**). La ragione di questo allungamento è dovuta dal fatto che la velocità del fotone non si compone vettorialmente con la velocità dell'astronave come nel caso della palla e dell'auto, poiché, per quanto detto prima, la velocità del fotone osservato da qualsiasi riferimento fisso o in moto è sempre uguale alla velocità della luce..

Conseguentemente, il fotone viaggiando alla velocità della luce sui tragitti obliqui percorrerà uno spazio maggiore e quindi il tempo impiegato non sarà di **2 secondi** bensì di **3,024** , valore ottenuto dalle seguenti formule dedotte dall'analisi della geometria della **Figura 50**.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{v'}{c}\right)$$

$$\Delta x = 2 \cdot \frac{h}{\tan(\alpha)} = 680.336 \text{ Km}$$

$$\Delta t = t_f' - t_i' = 2 \cdot \sqrt{\left[\frac{h^2}{c^2} + \left(\frac{\Delta x}{2 \cdot c}\right)^2\right]} = \sqrt{\left[\Delta \tau^2 + \left(\frac{\Delta x^2}{c^2}\right)\right]}$$

Da queste formule con la relazione precedente $\Delta \tau$ si arriva alla famosa formula della **Dilatazione dei Tempi**.

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3^{\text{s}},024$$

in cui si vede che il tempo trascorso all'interno dell'astronave $\Delta \tau$ è più breve di quello osservato da un riferimento esterno Δt .

Un altro esempio molto suggestivo che ci fa capire come i tempi si dilatino enormemente man mano che ci si avvicina alla velocità della luce è quello di immaginare un ipotetico viaggio con un'astronave diretta su **Alpha Centauri**, la **Stella** o meglio il sistema stellare triplo più vicino a noi .

Poiché **Alpha Centauri** dista da noi **circa 4,28 anni luce** , un 'astronave che viaggiasse alla velocità della luce, osservata dal riferimento terrestre la si vedrebbe arrivare sulla **Stella** esattamente dopo 4,28 anni, mentre il tempo registrato dagli astronauti a bordo della nave spaziale sarebbe praticamente nullo, nel senso che gli istanti di partenza e arrivo sarebbero coincidenti. Ovviamente questo è un esperimento puramente teorico in quanto l'astronave non potrà mai raggiungere la velocità della luce (vedi più avanti).

Comunque è interessante notare come varino i tempi nei due sistemi di riferimento in funzione della velocità dell'astronave. Infatti dalla **Figura 51** si vede che ad una ipotetica velocità di **100 000 Km/s** l'astronave osservata dalla **Terra** impiega ben **13 anni** per arrivare su **Alpha Centauri**, mentre per gli astronauti sembra che siano passati solo **12 anni**.

Considerando velocità ancora più elevate si vede dalla **Figura 52** come si dilatano esponenzialmente i tempi. Quando l'astronave raggiunge i **294.000 Km/s**, il tempo impiegato per raggiungere la **Stella**, osservato nel sistema dell'astronave, è di soli **10 mesi** ,mentre alla velocità di **298.000 Km/s** il tempo impiegato scende a soli **5 mesi** .

Una conseguenza della **Dilatazioni dei Tempi** è la **Contrazione delle Lunghezze** quando le velocità in gioco si approssimano a quelle della luce. Infatti se immaginassimo di considerare due osservatori, uno in viaggio a bordo di una automobile intento ad attraversare un ponte ad una certa velocità e un altro osservatore fermo sul ponte stesso, vedremmo che la lunghezza del ponte dal punto di vista dell'osservatore fermo è **L₀ (lunghezza propria)**, che può essere misurata, come la velocità dell'auto che è **v**, mentre il tempo proprio impiegato dall'auto per attraversare il ponte non è possibile misurarlo poiché l'osservatore non può essere contemporaneamente all'inizio e alla fine del ponte per vedere i 2 istanti di attraversamento, per cui si può solo determinarlo tramite la seguente relazione:

$$\Delta t = \frac{L_0}{v}$$

Se osservassimo la situazione dal punto di vista dell'automobilista, lui sarebbe in grado di misurare il tempo proprio Δt_0 ma non la lunghezza del ponte, in quanto rispetto a lui, questo, è in movimento, mentre sarebbe d'accordo con l'osservatore fermo, per quanto riguarda la velocità v . Quindi analogamente alla relazione precedente si ha:

$$\Delta t_0 = \frac{L}{v}$$

DIAGRAMMA VELOCITA' - TEMPO PER UN VIAGGIO SU α CENTAURI

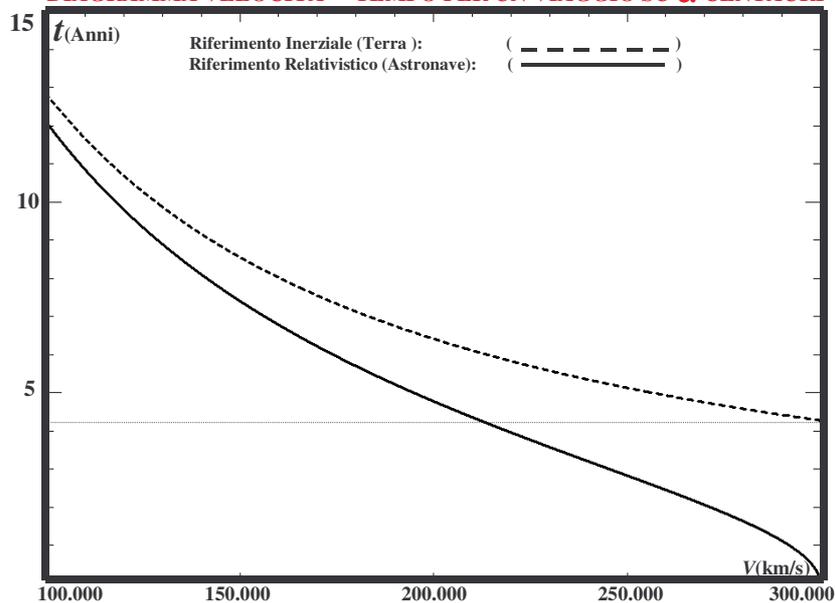


Fig. 51

DIAGRAMMA VELOCITA' - TEMPO PER UN VIAGGIO SU α CENTAURI

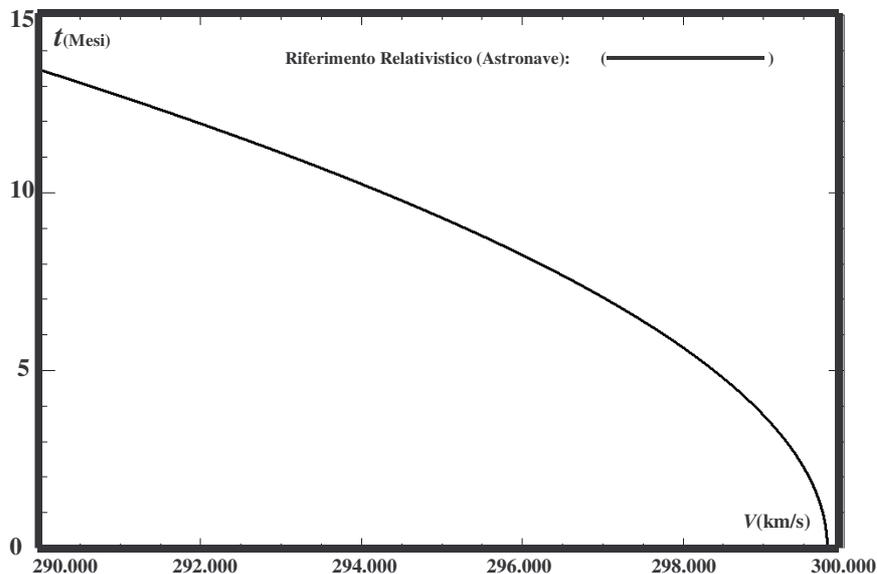


Fig. 52

Poiché v è comune ai due osservatori le relazioni precedenti si possono uguagliare :

$$v = \frac{L_0}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta t_0}$$

ma ricordando la formula della **Dilatazione dei Tempi** vista prima, che può scriversi in questa forma:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

si ha :

$$L = L_0 \cdot \frac{\Delta t_0}{\Delta t} = L_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

In termini pratici la lunghezza del ponte (L_0) vista dall'osservatore fermo sul ponte stesso risulta più lunga di quella (L) osservata dall'automobilista che passa sul ponte a velocità v .

Una interessante verifica sperimentale della **Dilatazione dei Tempi** ci è fornita dall'esperimento di **Hafele e Keating** (**Hafele J.C and Keating R.E.,1972**) i quali hanno pensato di installare due coppie di orologi atomici a bordo di 2 aeroplani che avevano il compito di fare il giro del mondo viaggiando in direzioni opposte (uno nel senso di rotazione della **Terra** e l'altro nel senso opposto). Ebbene questi due aerei, partiti entrambi da Washington **nell'ottobre1971**, con gli orologi sincronizzati sulla stessa ora, sono ritornati nuovamente nell'aeroporto di questa città **circa 50 ore** dopo, mostrando chiaramente una differenza di tempo tra le due coppie di orologi corrispondente a **332 nano secondi** ($332 \cdot 10^{-9}$ secondi), nel senso che gli orologi dell'aereo, che avevano viaggiato verso **Est**, risultavano in anticipo di questa quantità sugli orologi che viaggiavano verso **Ovest**. La spiegazione di questa differenza di tempi è da ricercarsi nel fatto che l'aereo che viaggiava verso **Est**, visto da un riferimento "fisso" collocato al centro della **Terra**, sommava la sua velocità a quella tangenziale della **Terra**, mentre quello che viaggiava verso **Ovest** la sottraeva. In altri termini se la velocità degli aerei era $u = 222 \text{ m/s}$ e quella della **Terra** all'**Equatore** è $v = 465 \text{ m/s}$, in un tempo di volo $\Delta t = 50^h \cdot 3600 = 180000^s$, i tempi registrati dai due aerei secondo la formula della **Dilatazione dei Tempi** sono:

$$\Delta \tau_1 = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{(v+u)^2}{c^2}} = 179.999^s,999 \ 999 \ 527 \ 38 \quad (\text{Aereo che viaggia verso Est})$$

$$\Delta \tau_2 = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{(v-u)^2}{c^2}} = 179.999^s,999 \ 999 \ 940 \ 86 \quad (\text{Aereo che viaggia verso Ovest})$$

per cui la differenza di tempo tra le coppie di orologi è di

$$\Delta \tau = \Delta \tau_2 - \Delta \tau_1 = 413,478 \ 119 \ 298 \ 815 \ 73 \quad \text{nanosecondi}$$

Il valore effettivamente riscontrato sulla coppia di orologi atomici dei due aerei ha portato come risultato finale una differenza $\Delta\tau$ di **322 nanosecondi**.

La differenza riscontrata tra i valori calcolati e quelli effettivamente osservati è da imputarsi al fatto che nelle formule abbiamo supposto:

- un tempo esatto di volo di 50 ore (non necessariamente vero)
- una traiettoria di volo effettuata lungo l'**Equatore** (non vera in quanto gli aerei sono partiti da Washington e arrivati nello stesso luogo seguendo percorsi lontani dall'**Equatore**)
- una velocità uniforme dei due aerei senza soste (non vero).
- un campo gravitazionale uguale sia sulla **Terra** che a bordo degli aerei

Nonostante l'incertezza di questi dati il risultato finale (**322 contro 413 nanosecondi**) è dello stesso ordine di grandezza di quello osservato, per cui c'è da ritenere che la formulazione della **Dilatazione dei Tempi** sia corretta.

Un'altra intuizione geniale di **Einstein** è quella che va sotto il nome di **Principio di Equivalenza**.

Con questo principio si vuole affermare che i fenomeni fisici osservati in un laboratorio soggetto al campo gravitazionale terrestre sono gli stessi di quelli osservati da un altro laboratorio all'interno di una stazione spaziale che viaggia nello spazio con un moto uniformemente accelerato.

Infatti, se un astronauta si trova all'interno di una astronave e non può vedere quello che succede all'esterno, non saprà mai se la sua astronave è ferma sulla rampa di lancio o se sta viaggiando nello spazio con un'accelerazione di **9,806 65 m/s²** pari a quella di gravità sulla superficie terrestre.

In altri termini, una persona di **72 Kg** all'interno di una astronave continuerà a pesare **72 Kg** sia che questa sia ferma sulla **Terra** sia che viaggi nello spazio con i motori accesi che imprimano alla nave spaziale un'accelerazione uguale a quella di gravità.

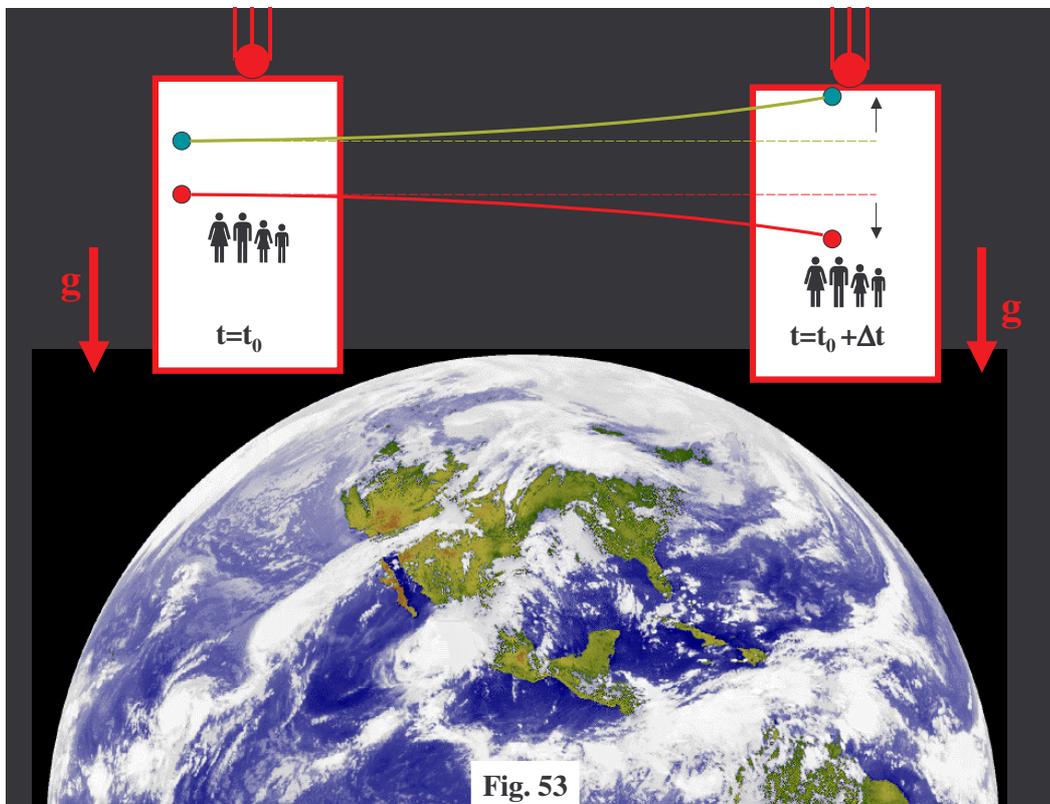
Allo stesso modo si può osservare che tutti gli oggetti all'interno dell'astronave cadono verso il pavimento con la stessa dinamica, sia che l'astronave si trovi sulla **Terra**, sia che viaggi con un determinato moto accelerato nello spazio.

Una elaborazione di questi concetti è stata ulteriormente sviluppata da **Einstein**, il quale si pose il problema di capire cosa sarebbe successo all'interno di una astronave in caduta libera dagli spazi profondi verso la **Terra** (o di un ascensore al quale vengono tagliati i fili che lo sorreggono). Anche in questo caso l'astronave sarebbe stata sottoposta ad un'accelerazione costante, arrivata in prossimità della **Terra**, ma a differenza della situazione precedente in cui è l'astronave ad accelerare, è quest'ultima ad essere accelerata dal campo gravitazionale terrestre.

Inoltre, non solo l'astronave viene accelerata ma anche tutti gli oggetti mobili, persone comprese, nel suo interno subiscono la stessa accelerazione. Il risultato finale di questa caduta libera verso la **Terra** si traduce in una apparente assenza di peso degli oggetti e persone all'interno della nave spaziale. In questo contesto l'astronave pur essendo soggetta ad un campo gravitazionale si comporta come un sistema riferimento inerziale che si muove nello spazio con velocità costante, tale per cui valgono le stesse leggi fisiche dei "veri" sistemi inerziali. Infatti se un astronauta in caduta libera con la sua astronave verso la **Terra** lancia una pallina ad un suo compagno, questa viaggerà all'interno dell'astronave apparentemente con moto rettilineo uniforme ad una certa velocità. Ovviamente il fenomeno osservato dall'esterno farà vedere che sia gli astronauti sia la pallina viaggiano di moto accelerato. In realtà quello che abbiamo descritto è un esperimento ideale poiché ad un certo istante all'interno dell'astronave esiste un campo gravitazionale non perfettamente costante, nel senso che il pavimento e il soffitto dell'astronave si trovano ad altezza diversa dalla superficie terrestre.

Quindi, se all'interno dell'astronave in caduta libera vengono lanciate due palline, una vicino al soffitto e l'altra vicino al pavimento con direzione parallela alla superficie terrestre, vedremo che dopo un po' di tempo le due palline tenderanno ad allontanarsi l'una dall'altra di una piccolissima quantità che dipende dalla differenza di gravità esistente tra i due punti estremi dell'astronave (o dell'ascensore come mostrato in **Figura 53**).

Questo fenomeno dovuto a differenti potenziali gravitazionali cui sono soggette le due palline è attribuibile a quelle che vengono chiamate **Forze di Marea Gravitazionali** che possono essere quantificate con la seguente relazione :



$$\Delta g = \frac{2 \cdot G \cdot M \cdot \Delta z}{R^3}$$

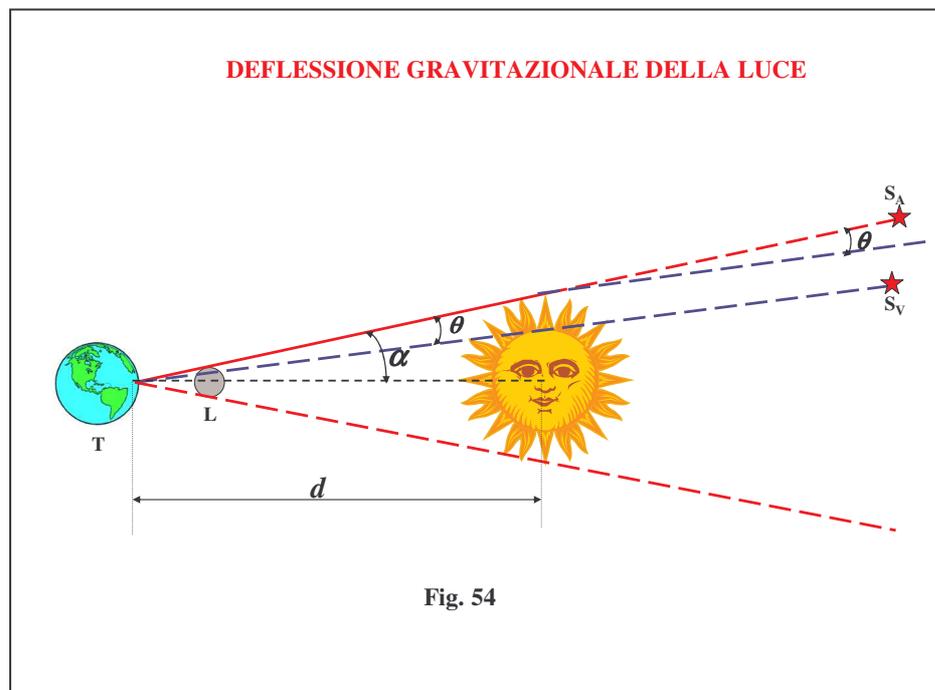
dove al solito **G** è la costante di gravità, **Δz** la distanza tra le due palline, **M** la massa della **Terra** e **R** la distanza tra il centro della **Terra** e le due palline. Questa relazione è un'approssimazione del differenziale dell'accelerazione di gravità, dato che la quantità **Δz** è infinitamente più piccola della distanza centro **Terra**-palline .

Poiché il campo gravitazionale ha la facoltà di curvare lo spazio-tempo nelle sue immediate vicinanze, un fotone, che notoriamente ha massa nulla a riposo, per effetto di tale curvatura viene deviato dalla sua traiettoria rettilinea. Questo accade non perché, come erroneamente si potrebbe pensare, alla velocità della luce possiede una massa finita, seppur piccola, e quindi si comporterebbe come un qualsiasi altro corpo dotato di massa in presenza di un campo gravitazionale, ma perché segue le leggi della **Relatività Generale** e non della **meccanica Newtoniana**.

Infatti una verifica della **Teoria della Relatività Generale** ci venne data con l'**eclisse di Sole del 29 maggio del 1919** e successivamente con altre eclissi. In quel caso si osservò che la luce proveniente da una **Stella** prospetticamente vicina al **Sole** durante una eclisse totale di **Sole** veniva deviata secondo un certo angolo che è rappresentabile con la seguente formula (vedi anche **Figura 54**):

$$\vartheta^{\circ} = \frac{4 \cdot G \cdot M \cdot 180^{\circ}}{c^2 \cdot R \cdot \pi}$$

dove θ° è lo spostamento angolare della **Stella** (in gradi) dalla sua posizione vera **S_v** (in assenza di eclisse di **Sole**) alla posizione apparente **S_A**, prodotto sostanzialmente dall'azione gravitazionale del **Sole** in eclisse sulla luce proveniente dalla **Stella**. Gli altri termini dell'equazione al solito rappresentano la costante di gravità **G**, la massa del **Sole M**, il raggio del **Sole R** e la velocità della



luce **c**, mentre la quantità $180^{\circ} / \pi$ è la costante di trasformazione da radianti in gradi. Ovviamente più la massa del corpo perturbatore interposto tra noi e la **Stella** è massiccia, tanto più grande sarà l'angolo di deflessione. Nel caso del **Sole** sapendo che $R=696.000.000 \text{ m}$, $G = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ Kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $M = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ Kg}$, $c = 299.792.458 \text{ m/s}$ tale angolo ammonta a circa :

$$\vartheta^{\circ} = \frac{4 \cdot 6,67259 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \cdot 180}{299.792.458^2 \cdot 696.000.000 \cdot 3,1415} = 0^{\circ},00048696$$

$$\vartheta'' = \vartheta^{\circ} \cdot 3600 = 1'',75$$

Una espressione più generale della deflessione relativistica della luce ci è data dalla seguente formula (vedi anche **Figura 54**):

$$\Delta\alpha \cong \vartheta = \frac{2 \cdot G \cdot M}{d \cdot c^2} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{1 - \cos(\alpha)}}$$

dove $\Delta\alpha$ rappresenta il valore della deflessione relativistica in radianti mentre α è la distanza angolare tra la **Stella** che subisce la deflessione e il corpo perturbatore (genericamente il Sole ma anche qualsiasi altro astro massiccio che si interpone davanti ad una **Stella** lontana), d la distanza espressa in metri, M la massa del corpo perturbatore in Kg, c la velocità della luce e G la costante di gravitazione universale come già definite precedentemente

Sempre restando nel campo della **Relatività Generale**, **Einstein** è riuscito ad intuire nel **1911** che l'energia di un fotone ($E = h \nu$) emessa in prossimità del pavimento di un'astronave in moto accelerato nello spazio è più elevata di quella del fotone rivelata sul soffitto dell'astronave. Questo perché il fotone dovendo vincere l'accelerazione dell'astronave che tenderebbe a trattenerlo sul pavimento perde energia, per cui quando arriva sul soffitto dell'astronave avrà una energia minore e quindi una frequenza ν inferiore di quella che aveva al momento della sua emissione.

Poiché si è visto precedentemente che gli effetti fisici riscontrati all'interno di un'astronave in moto accelerato nello spazio con accelerazione g (accelerazione di gravità terrestre) sono analoghi a quelli che si verificano sulla **Terra**, per il **Principio di Equivalenza** allora anche la radiazione emessa dalla superficie terrestre dovrà perdere energia salendo verso lo spazio esterno dove il potenziale gravitazionale tende a diminuire in valore assoluto.

In altri termini un segnale luminoso di una certa frequenza ν_e emesso idealmente da un enorme faro dalla **Terra** verso lo spazio, sarà ricevuto da un ipotetico osservatore posto nello spazio, fuori dal campo gravitazionale terrestre e fisso rispetto alla **Terra**, con una frequenza ν_r più bassa di una quantità data dalla seguente formula:

$$\nu_r = \nu_e \sqrt{1 - \frac{2 \cdot G \cdot M_T}{c^2 \cdot R_T}}$$

dove al solito $R_T = 6.378.000 \text{ m}$ è il raggio della **Terra**, $G = 6,672 \text{ } 59 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ Kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $M_T = 5,973 \text{ } 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$ è la massa della **Terra** e $c = 299.792,458 \text{ km/s}$.

In sostanza la frequenza della radiazione luminosa emessa dalla **Terra** vista dallo spazio si riduce di un fattore:

$$K = \frac{\nu_e - \nu_r}{\nu_e} = 6,9355199820336402 \cdot 10^{-10}$$

Questo fenomeno che va sotto il nome di **Redshift Gravitazionale** non va confuso con l' **Effetto Doppler Relativistico** che può esprimersi con la seguente formula utilizzando gli stessi simboli del **Redshift Gravitazionale** (le velocità di avvicinamento e allontanamento in questo caso sono prese in valore assoluto):

$$v_r = v_e \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{|v|}{c}}{1 - \frac{|v|}{c}}} \quad (\text{se la sorgente è in avvicinamento alla velocità } v)$$

$$v_r = v_e \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{|v|}{c}}{1 + \frac{|v|}{c}}} \quad (\text{se la sorgente è in allontanamento alla velocità } v)$$

In verità le due relazioni precedenti sono un caso particolare dell'**Effetto Doppler Relativistico Generale** che si esprime mediante la formula (vedi **Figura 55**) :

$$v_r = v_e \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c} \cdot \cos(\vartheta)}$$

dove θ rappresenta l'angolo secondo cui la sorgente considerata si muove rispetto all'osservatore. In altri termini quando $\theta = 0^\circ$ la sorgente si muove longitudinalmente verso di noi e la frequenza v_r aumenta con l'aumentare della velocità di avvicinamento (**Blue Shift**), quando $\theta = 180^\circ$ la sorgente si allontana longitudinalmente dall'osservatore e la frequenza v_r diminuisce con l'aumentare della velocità di allontanamento (**Red Shift**), mentre quando $\theta = 90^\circ$ o quando $\theta = 270^\circ$ la sorgente si muove trasversalmente rispetto all'osservatore e quindi la frequenza v_r osservata sarà data dalla seguente relazione (dove $\cos(\theta) = 0$):

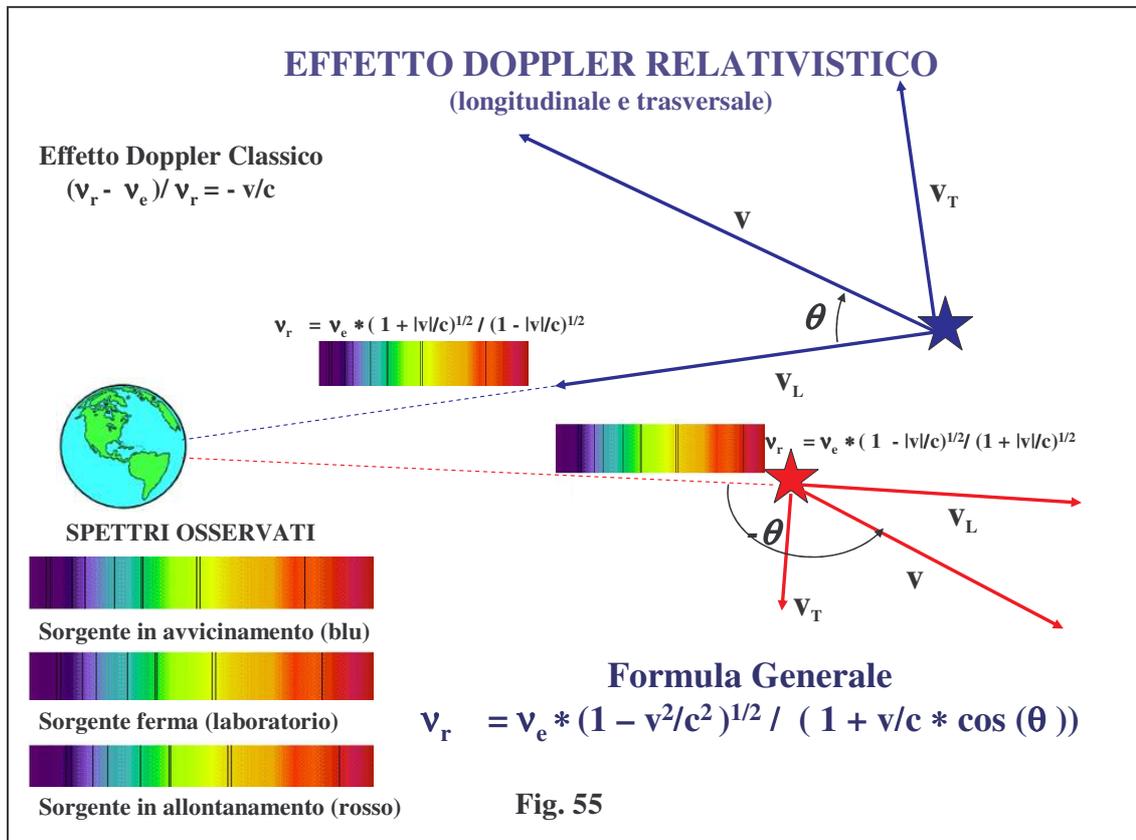
$$v_r = v_e \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Questa formula rappresenta quello che comunemente viene chiamato **Effetto Doppler Relativistico Trasversale**.

La **Figura 55** illustra come l'**Effetto Doppler** si manifesta quando si osserva lo spettro di una **Stella** in avvicinamento o in allontanamento rispetto a noi. Poiché lo spettro continuo di una **Stella** è solcato da righe oscure di assorbimento che corrispondono a determinati elementi chimici aventi ben determinate frequenze (o lunghezze d'onda), queste righe in seguito al fenomeno **Doppler** si spostano nella banda spettrale verso frequenze più elevate (parte blu dello spettro) rispetto alle medesime righe degli stessi elementi chimici osservati in laboratorio se la **Stella** è in avvicinamento (velocità negative), mentre mostrano uno spostamento verso frequenze più basse (parte rossa dello spettro) se la **Stella** si sta allontanando (velocità positive).

Sapendo che la frequenza è l'inverso del periodo, la stessa relazione può essere scritta come segue:

$$T_r = \frac{T_e}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



che è la stessa relazione della **Dilatazione dei Tempi** vista prima.

La cosa interessante che si può notare da queste formule è che se le velocità in gioco sono piccole rispetto alla velocità della luce l'Effetto Doppler longitudinale classico continua a osservarsi, mentre quello **trasversale** non viene più osservato poiché $v^2/c^2 \approx 0$.

Una verifica tangibile della **Relatività Generale** riguardante il **Redshift Gravitazionale** è stata fornita da un esperimento di **Leschiutta e Briatore nel 1975**.

L'esperimento consisteva nel registrare la differenza di tempo esistente tra due orologi atomici situati in località a differenti quote per un certo numero di giorni.

Più precisamente si sono tarati e sincronizzati ad un certo giorno due orologi atomici identici nel laboratorio dell'**Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris di Torino**, quindi uno di questi è stato trasportato sulla montagna del **Plateau Rosà**, distante 90 km da **Torino**, ad una quota di **3250 m** sul livello del mare. Dopo **68 giorni** l'orologio situato in montagna fu riportato a **Torino** e confrontato con l'orologio atomico lasciato all'inizio dell'esperimento nel laboratorio del **Galileo Ferraris**. Ebbene, con grande sorpresa si constatò che i due orologi non erano più sincronizzati ma

scartavano di **2,4 microsecondi (2,4 milionesimi di secondo)** nel senso che l'orologio lasciato a **Torino** era indietro rispetto a quello portato in montagna, appunto di questa quantità.

Ovviamente si cercarono tutte le possibili cause fisiche che avessero potuto in qualche maniera modificare il comportamento dei due orologi, ma alla fine si giunse alla conclusione che, forse, l'unica variabile in grado di alterare il sincronismo degli orologi fosse la differenza di quota alla quale erano stati collocati per l'esperimento. Tuttavia questa differenza non fu attribuita alla differenza di pressione atmosferica tra **Torino** e il **Plateu Rosà**, bensì ad una variazione del potenziale gravitazionale terrestre su siti a differente quota.

In questo contesto la **Teoria della Relatività Generale** prevede appunto il rallentamento degli orologi quando questi sono soggetti all'azione di un campo gravitazionale e il rallentamento è tanto più marcato quanto più l'orologio di trova vicino al centro di massa del pianeta o della **Stella**.

La relazione relativistica che fornisce appunto il **Redshift Gravitazionale** è la seguente:

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2 \cdot R}}}$$

dove Δt è il tempo registrato da un orologio nello spazio e fuori da qualsiasi campo gravitazionale, $\Delta \tau$ il tempo registrato da un orologio situato ad una distanza R dal centro di massa del pianeta di massa M (o **Stella**).

Nel caso specifico dell'esperimento di **Leschiutta e Briatore** la formula precedente utilizzata per le due quote in questione : $Q_T = 250 \text{ m s.l.m. per Torino}$ e $Q_{PR} = 3.250 \text{ m s.l.m. per Plateau Rosà}$ assumendo un raggio medio terrestre R di **6.367.500 m** fornisce:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2 \cdot (R + Q_T)}}} = \frac{\Delta \tau}{9,9999999930352879 \cdot 10^{-1}}$$

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2 \cdot (R + Q_{PR})}}} = \frac{\Delta \tau}{9,9999999930385675 \cdot 10^{-1}}$$

Quindi se l'intervallo di tempo di tutto l'esperimento corrisponde a :

$$\Delta \tau^s = 68^d \cdot 24^h \cdot 3.600^s = 5.875.200^s$$

la differenza:

$$\Delta t_2 - \Delta t_1 = 1,9268298956376384 \cdot 10^{-6} \text{ secondi}$$

anche se non esattamente coincidente con il valore realmente riscontrato, come ordine di grandezza ($1,9 \cdot 10^{-6}$ contro $2,4 \cdot 10^{-6}$) è praticamente lo stesso.

Un'altra prova sperimentale della correttezza della **Teoria Generale della Relatività** fu confermata già nel **1916** con la verifica dello spostamento anomalo del perielio di Mercurio.

A questo proposito occorre ricordare che Mercurio è il pianeta più vicino al **Sole** in quanto dista mediamente **58 milioni di Km**, ma al tempo stesso ha un'orbita fortemente ellittica che lo porta

periodicamente ad avere una distanza minima dal **Sole (Perielio)** di **46 milioni di Km** fino ad una distanza massima (**Afelio)** di **70 milioni di Km** , con un periodo di rivoluzione di circa **88 giorni**.

Per effetto della forte eccentricità dell'orbita e della relativa vicinanza al **Sole** il pianeta subisce delle sensibili variazioni nella velocità orbitale nel corso di una rivoluzione e conseguentemente è soggetto anche a variazioni del **Potenziale Gravitazionale** generato dal **Sole**.

Queste variazioni, insignificanti per gli altri **Pianeti** più distanti e con orbite meno eccentriche, sono invece cruciali per Mercurio. Infatti già nel **1859 Le Verrier** aveva notato che lo spostamento della linea degli **Apsidi** di questo pianeta (secondo i calcoli effettuati con le leggi della meccanica Newtoniana e tenendo in conto l'influenza perturbatrice di tutti i **Pianeti** conosciuti), doveva produrre una rotazione dell'orbita di Mercurio e quindi un aumento della longitudine del **Perielio** di **531 secondi d'arco per secolo**. In realtà con le recenti osservazioni si è osservato uno spostamento maggiore, valutabile in **573,57 secondi d'arco per secolo**, cioè ben **43"** in più di quelli previsti e sicuramente non attribuibili ad errori di osservazione .

Quindi, se facciamo intervenire i principi della **Relatività Generale** al posto di quelli della **Meccanica Classica** siamo in grado di spiegare l'anomalia dei **43"** in più riscontrati nelle osservazioni di Mercurio.

Per la **Teoria della Relatività Generale** si ricorda che la massa di un corpo qualsiasi varia a seconda della velocità che ha rispetto ad un sistema di riferimento inerziale "fisso" secondo la relazione :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

dove **m** è la massa con velocità **v** osservata da un sistema inerziale "fisso", **m₀** è la massa dell'oggetto a riposo, cioè come misurata nel proprio sistema di riferimento, mentre **c** è la velocità della luce nel vuoto (**c= 299.792,458 Km/s**).

A questo proposito occorre ricordare che alla velocità della luce la massa **m** tende all'infinito per cui c'è da ritenere che nessun oggetto materiale, eccetto i fotoni che hanno massa nulla a riposo, possa essere accelerato fino a quella velocità.

Da quanto abbiamo detto segue che la forza gravitazionale del **Sole** su **Mercurio** sarà più forte rispetto a quella prevista dalla meccanica classica in particolar modo quando il pianeta si troverà in prossimità del **Perielio**.

Infatti l'accelerazione gravitazionale nella concezione Newtoniana si esprime come:

$$a_N = \frac{-G \cdot M_o}{R^2}$$

mentre in quella della **Relatività Generale** si modifica con un termine aggiuntivo nel seguente modo:

$$a_R = \frac{-G \cdot M_o}{R^2} \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \frac{v^2}{c^2}}$$

dove al solito **G** è la costante di gravitazione universale, **M_o** la massa del **Sole**, **R** la distanza di **Mercurio** dal **Sole** (in questo specifico caso).

Quindi al **Perielio Mercurio** tenderà ad avere una accelerazione di gravità maggiore di quella prevista e conseguentemente una massa maggiore ed anche una velocità orbitale più grande, apprezzabile dal punto di vista relativistico.

Il risultato delle variazioni di accelerazione, di massa e di velocità si traducono in uno spostamento in senso diretto della linea degli **Apsidi** di una quantità che ammonta appunto a **circa 43"** per secolo rispetto allo spostamento della stessa linea secondo la meccanica classica (aumento della **Longitudine del Perielio** da **531" a 573",57 per secolo**).

In questo paragrafo abbiamo sintetizzato solo i concetti basilari della **Teoria della Relatività Ristretta e Generale**. Tuttavia il lettore può approfondire l'argomento consultando il testo del **Rindler W., 1979, "Essential Relativity"**

Scale di Tempo Moderne

Il Tempo Dinamico Terrestre (TDT)

Intorno agli anni '70 l'**IAU** raccomandò che si stabilissero tutti gli scostamenti delle origini delle varie **Scale di Tempo** istituite rispetto al **Tempo Atomico Internazionale TAI** ad una data epoca, nonché assicurare la continuità della **Scala del Tempo delle Effemeridi ET** a cui le osservazioni erano usualmente riferite.

Sulla base di quanto abbiamo detto tra il **1976 e il 1979** l'**IAU** istituì due nuove **Scale di Tempo** :

- **Il Tempo Dinamico Terrestre (TDT)**
- **Il Tempo Dinamico Baricentrico (TDB)**

Il **Tempo Dinamico Terrestre (TDT)**, altrimenti detto **Tempo Terrestre (TT)**, è il **Tempo Proprio** prodotto da un orologio ideale situato al centro della **Terra** ma con l'**Unità di Tempo** che può estendersi avanti e indietro nel tempo e che è collocata sulla superficie terrestre, cioè in un sistema di riferimento ruotante sia intorno al proprio asse che rispetto al **Sole**.

L'origine del **TT**, per il fatto che doveva assicurare la continuità del **TE**, venne sincronizzato con il **TAI** il **1° gennaio 1977** alle ore **00^h 00^m 00^s,00** di **TAI** corrispondenti alle ore **00^h 00^m 32^s,184** di **TT (TDT)**. Poiché il **TAI** è generato da un insieme di circa **200 orologi al Cesio** e alcuni **H-Masers** sparsi in una cinquantina di laboratori di tutto il mondo, uno specifico orologio posto sul geoide segna un secondo (**SI**) leggermente diverso da quello ideale per cui il **TT** può discostarsi al massimo di circa **1 micro-secondo per anno** dal **TAI**, quantità praticamente trascurabile ai fini pratici.

Pertanto ai giorni nostri il **TT** ha rimpiazzato il desueto **Tempo delle Effemeridi ET** mantenendo nel contempo la sua continuità.

Quindi la trasformazione dal **TDT** al **TAI** può sintetizzarsi nella seguente formula e che può essere visualizzata graficamente nella **Figura 56**:

$$TT = TDT = ET = TAI + 32^s,184$$

Tempo Dinamico Baricentrico (TDB)

Il Tempo Dinamico Baricentrico (*TDB*) è ovviamente un Tempo Dinamico e Coordinato in quanto registra il tempo di determinati eventi astronomici come se fossero osservati dal baricentro del nostro sistema solare che si discosta al massimo dal centro del Sole di *0,008 Unità Astronomiche (A.U.)*.(circa 1.200.000 km)

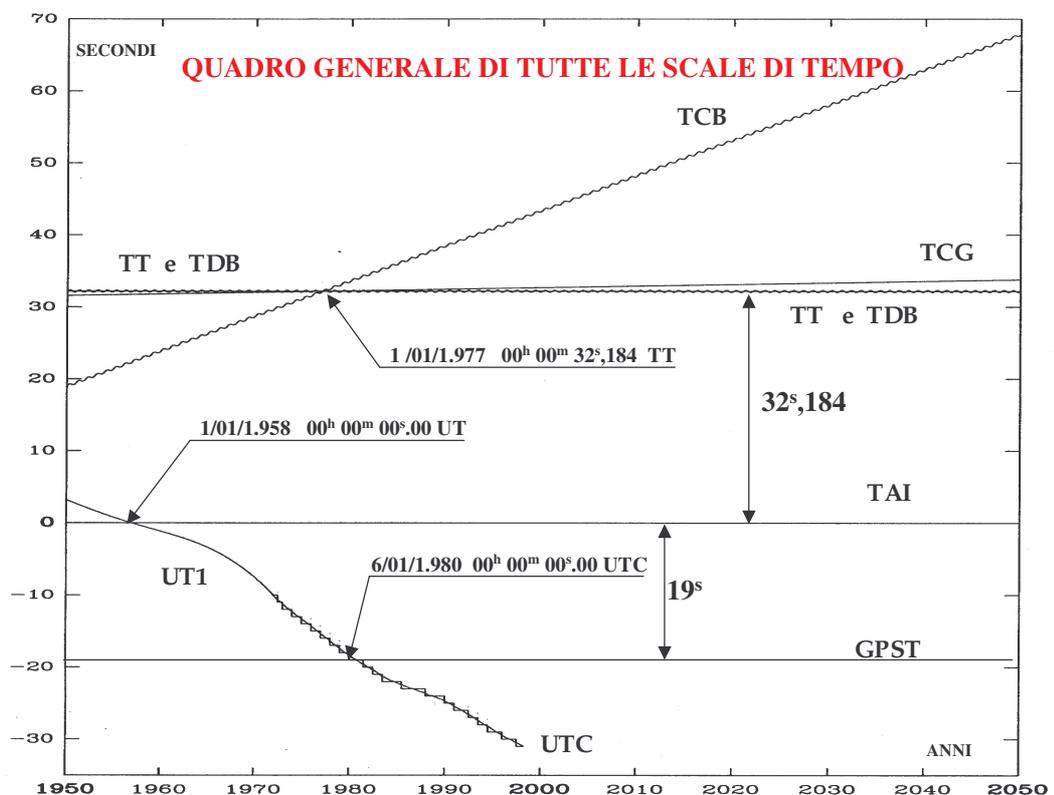


Fig. 56

Pertanto un orologio atomico posto nel baricentro del sistema solare manterrebbe la sua frequenza costante nel tempo o, in altre parole, la durata di un secondo *SI* di questo orologio rimarrebbe (entro certi limiti) inalterata nel tempo. Quindi tutti gli eventi astronomici di tipo rigorosamente periodico (ad esempio le pulsazioni di una Pulsar) osservati da questo privilegiato sistema di riferimento darebbero intervalli di tempo costanti ed affidabili con il trascorrere degli anni in quanto il potenziale gravitazionale nel baricentro del sistema solare “sarebbe” praticamente costante .

Ricordiamo che il potenziale gravitazionale esercitato da un corpo massiccio come ad esempio il Sole sull’unità di massa posta a distanza *R* é rappresentabile mediante la seguente formulazione:

$$\Phi = \frac{-G \cdot M_o}{R}$$

dove $G = 6,672\ 59 \cdot 10^{-11} \pm 8,5 \cdot 10^{-15} \text{ m}^3 \text{ Kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ è la **Costante di Gravitazione Universale** e

$M_o = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ Kg}$ è la **massa del Sole**.

Orbene, se consideriamo la **Terra** nel suo moto orbitale intorno al **Sole**, vedremo che questa muovendosi su di un'orbita ellittica (eccentricità $e = 0,016\ 751\ 04 - 0,000\ 041\ 80\ T - 0,000\ 000\ 126\ T^2$) viaggia a velocità variabili. Dalla teoria di gravitazione si sa che la distanza **Terra-Sole** varia nel corso di un anno di circa **2,5 milioni di Km** in più e in meno rispetto ad una distanza media della **Terra** dal **Sole** di **149.597.870,691 km** a seconda che si trovi in prossimità dell'**Afelio** o del **Perielio**.

Per questo fatto sarà soggetta alle variazioni del potenziale gravitazionale del **Sole** (Φ) come è possibile vedere dalla relazione precedente in cui R , in questo caso, rappresenta la distanza istantanea della **Terra** dal **Sole**. Quindi, secondo la **Teoria Generale della Relatività**, un orologio atomico sulla **Terra** viaggia più lento nelle regioni di basso (in senso algebrico) **Potenziale Gravitazionale** e cioè in prossimità del **Perielio** mentre viaggia più veloce all'**Afelio** dove il **Potenziale Gravitazionale** è più alto.

Ritornando al caso della nostra **Terra** la variazione del potenziale gravitazionale a cui è soggetto il nostro pianeta per effetto del **Sole** si traduce in una variazione del **Tempo Dinamico Baricentrico (TDB)** rispetto al **Tempo Dinamico Terrestre (TDT)** secondo una formulazione che messa in una forma semplificata mostra delle correzioni a carattere periodico dell'ordine di **1,6 millisecondi** con valor medio nullo. I termini dominanti in questa formula hanno periodo annuale e semiannuale (**Explanatory Supplement, 1992**):

$$TDB = TT + 0^s,001\ 656\ 8 \cdot \sin(M) + 0^s,000\ 013\ 8 \cdot \sin(2M)$$

dove M rappresenta l'**Anomalia Media** che a sua volta è rappresentata dalla relazione:

$$M = 357^{\circ},53 + 0^{\circ},985\ 600\ 28 \cdot (JD - 2.451.545,0)$$

dove JD è la **Data Giuliana** per la quale si vuole calcolare il **TDB**, mentre il valore **2.451.545,0** è la **Data Giuliana** al **1° Gennaio 2000 ore 12^h 00^m 00^s di TE**.

Formule più accurate con termini addizionali più piccoli di **20^{µs}** (microsecondi) dovuti ai potenziali gravitazionali della **Luna** e dei **Pianeti** e più piccoli di **2^{µs}** dovuti alle variazioni diurne introdotte dal moto di rotazione terrestre sono riportate negli articoli di **L. Fairhead et al., 1990** e **P. K. Seidelmann et al., 1992**. Queste variazioni nascono dall'**Effetto Doppler Trasverso** e dallo **Spostamento Gravitazionale verso il Rosso** poiché l'osservatore sulla **Terra** con il suo orologio varia la sua velocità nello spazio e si muove di conseguenza attraverso differenti potenziali gravitazionali. Al momento attuale le effemeridi dei **Pianeti** utilizzano il **TDB**. Tuttavia quando si prendono in considerazione i moti orbitali dei satelliti vicini alla **Terra** non è necessario usare il **TDB** in quanto i fenomeni relativistici dovuti al potenziale gravitazionale in cui sono immersi sia i satelliti che la **Terra** sono praticamente gli stessi.

Pertanto per il calcolo delle orbite dei satelliti è sufficiente usare il *TDT* che rappresenta una **Scala di Tempo** uniforme per moti entro il campo gravitazionale della **Terra** in quanto ha la stessa caratteristica del tempo generato da un orologio atomico posto sulla **Terra**.

Una rappresentazione grafica del *TDB* è data in **Figura 57** in cui si evidenzia la periodicità sinusoidale rispetto al *TT* (ingrandita cento volte rispetto alla scala della figura) e parallela al *TAI* (vedi **Figura 56**).

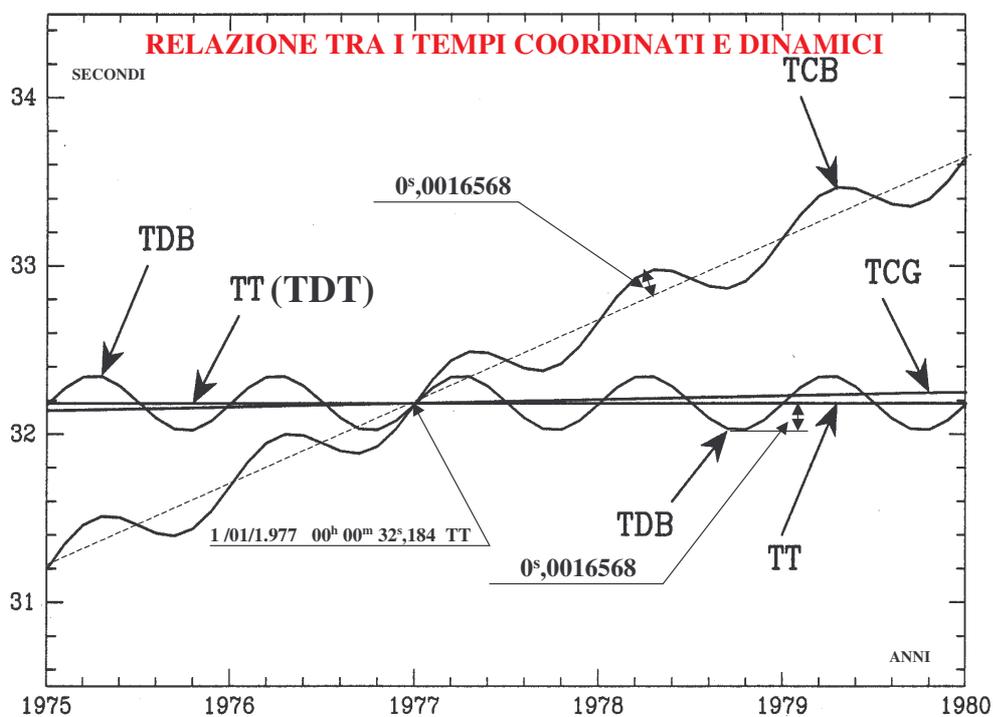


Fig. 57

Parallelamente al *TDT* e al *TDB* sono state introdotte nel 1991 dall'*IAU* altre due **Scale di Tempo** :

- Il Tempo Coordinato Baricentrico (*TCB*)
- Il Tempo Coordinato Geocentrico (*TCG*)

Tempo Coordinato Baricentrico (TCB)

Il **Tempo Coordinato Baricentrico (TCB)** è il miglior tempo scala che possa essere definito. In altri termini rappresenta il **Tempo Proprio** di un osservatore posto idealmente all'infinito ed in quiete rispetto al nostro sistema solare. Più precisamente è il **Tempo Coordinato** di un sistema di coordinate spazio-temporale che è centrato nel baricentro del nostro sistema solare, che si suppone non ruotante rispetto a galassie lontane e che tende asintoticamente al **Tempo Proprio** di un osservatore fisso rispetto a questo sistema di coordinate.

Questo tempo per convenzione è stato posto coincidente con le ore **00^h 00^m 00^s,00** di **TAI** del **1° gennaio 1977** corrispondenti alle ore **00^h 00^m 32^s,184** di **TT (TDT)** (vedi **Figura 56 e 57**).

L'unica differenza che mostra il **TDB** rispetto al **TCB** é che quest'ultimo aumenta linearmente con il passar del tempo mantenendo la stessa periodicità del **TDB** secondo la seguente relazione di **A.W. Irwin and T. Fukushima , 1999** (vedi anche la **Figura 57**):

$$TCB - TDB = L_B \cdot (t - t_0) = 1,550\,519\,767\,49 \cdot 10^{-8} \cdot (JD - 2.443.144,500\,372\,5) \cdot 86.400$$

dove **JD=2.443.144,500 372 5** corrisponde al **1° Gennaio 1977 ore 00^h 00^m 32^s,184** di **TT (TDT)**

Ai giorni nostri (nell'anno 2002) il **TCB** è avanti di circa **12^s** rispetto al **TDB** e di **44^s** rispetto al **TAI**.

Tempo Coordinato Geocentrico (TCG)

Il **Tempo Coordinato Geocentrico (TCG)** è analogo al **TCB** e si differenzia da questo solo per il fatto che viene considerato il centro della **Terra** anziché il Baricentro del sistema solare .

In sostanza il **TCG** coincide con il **Tempo Dinamico Terrestre (TT)** con l'eccezione che l'osservatore e l'orologio non considerano gli effetti gravitazionali della **Terra** e conseguentemente la dilatazione del tempo causata dalla sua stessa rotazione. In realtà questa quantità è molto piccola e crescente nel tempo ed ha origine comune con il **TCB**. Matematicamente la relazione tra **TCG** e **TDT** analoga come forma alla relazione precedente, può essere rappresentata nella seguente formulazione di **A.W. Irwin and T. Fukushima , 1999** (vedi anche la **Figura 57**) :

$$TCG - TDT = L_G \cdot (t - t_0) = 6,969\,290\,112 \cdot 10^{-10} \cdot (JD - 2.443.144,500\,372\,5) \cdot 86.400$$

In particolare si nota che la loro relazione dipende dal punto dello spazio dove il confronto è fatto. Questo perché un osservatore terrestre ed uno situato nel baricentro del sistema solare possono non essere d'accordo sul tempo di osservazione di due eventi simultanei.

Pertanto la relazione tra **TCB** e **TCG** diventa secondo **A.W. Irwin and T. Fukushima , 1999** e **P.K. Seidelmann and T. Fukushima, 1992**:

$$TCB - TCG = L_c \cdot (t - t_0) + v_e \cdot c^{-2} \cdot (x - x_e) + P =$$

$$TCB - TCG = 1,480\,826\,867\,41 \cdot 10^{-8} \cdot (JD - 2.443.144,500\,372\,5) \cdot 86.400 + \\ + v_e \cdot c^{-2} \cdot (x - x_e) + P$$

La presente relazione ha fondamentalmente tre termini:

- Un termine secolare L_c che fa aumentare il $TCB-TCG$ linearmente nel tempo . Questa costante riflette approssimativamente per 2/3 lo spostamento gravitazionale verso il rosso causato dall'attrazione del **Sole**, per 1/3 la dilatazione del tempo prodotta dal movimento della **Terra** attorno al **Sole** e per ancora una piccola parte ad effetti come l'influenza gravitazionale degli altri **Pianeti**. Questi effetti sono presenti nel TCG ma non nel TCB . Si ricorda che gli effetti gravitazionali della **Terra** stessa è come abbiamo detto non presente nel TCG mentre lo è nel TDT o TT
- Termini periodici (P). Questi termini sono quelli già riportati in maniera approssimativa per il calcolo del $TDB-TT$ ($TDB-TT = 0^s,001\ 656\ 8 \cdot \sin(M) + 0^s,000\ 013\ 8 \cdot \sin(2M)$) dove M assume l'espressione $M = 357^\circ,53 + 0^\circ,985\ 600\ 28 \cdot (JD - 2.451.545,0)$. Il termine principale di questa periodicità annuale ammonta a circa **1,7 millisecondi** e raggiunge il valore massimo nel mese di Aprile portando così il TCB avanti in più di circa **1,7 millisecondi** rispetto al TCG che al mese di Gennaio. Questo fatto è dovuto all'ellitticità dell'orbita terrestre.
- Termine secondario a carattere diurno ($v_e \cdot c^{-2} \cdot (x-x_e)$), dove il vettore x rappresenta la posizione baricentrica dell'osservatore, che cancella il suddetto termine se l'osservatore è al centro della **Terra**. Tale termine a carattere diurno è al massimo dell'ordine di **2,1 microsecondi** per un osservatore situato sulla superficie della **Terra**, mentre per un satellite dipende dai suoi parametri orbitali. Il TCB è quindi avanti rispetto al TCG di questa quantità per un osservatore situato all'**Equatore** al sorgere del **Sole** negli istanti del solstizio d'estate o d'inverno a differenza di un osservatore posto al centro della **Terra**, poiché tale osservatore è avanti rispetto al percorso orbitale intorno al **Sole**. Ovviamente i termini x_e e v_e sono vettori che denotano la posizione baricentrica e la velocità del centro di massa della **Terra**.

Tempo Universale Coordinato (UTC)

Tutte le **Scale di Tempo** finora trattate vengono comunemente usate per scopi prevalentemente astronomici. Tuttavia per gli scopi civili si fa uso di una **Scala di Tempo** legata essenzialmente al moto apparente e diurno di un **Sole Medio Fittizio** che dovrebbe, in linea di principio, compiere un giro esatto di 360° ogni $24^h\ 00^m\ 00^s,00$ ore solari medie in maniera costante nel corso degli anni. In realtà, come abbiamo visto precedentemente, il massimo che si era riusciti a fare con l'orologio **Terra** era stato quello di creare una scala di Tempo UTI che purtroppo risentiva ancora delle variazioni stagionali (corrette per la verità con l' $UT2$, ma in seguito non più utilizzato), delle variazioni secolari e soprattutto delle variazioni accidentali.

Quindi per scopi pratici gli Istituti addetti alla distribuzione dei segnali orari di tempo, non potendo fornire un **Tempo Universale** che variava con continuità decisero di correlarlo alla **Scala di Tempo TAI** molto più stabile dell' UTI .

Pertanto si decise di far coincidere il TAI con l' UTI il **1° Gennaio 1958** chiamandolo **Tempo Universale Coordinato (UTC)** nel senso che :

$$TAI = UTI = UTC = 00^h\ 00^m\ 00^s,00 \text{ il } 1^\circ \text{ Gennaio } 1958$$

Inoltre si decise di non far discostare nel corso degli anni l' UTI (dovuto al rallentamento terrestre) dal TAI di **non più di 0,9 secondi** e di mantenere la differenza tra il TAI e l' UTC confinata sempre entro un **numero intero di secondi (SI)** correggendo opportunamente l' UTC stesso (vedi **Figura 58**). Questa situazione venne fisicamente messa in atto solo dal **1° Gennaio 1972** quando lo scostamento tra l' UTC e il TAI ammontava a **-10 secondi esatti** . Ad esempio nell'anno 2002 la differenza ammontava a:

$TAI - UTC = +32^s$ (1° Gennaio 2002)

Praticamente la correzione dell'*UTI* in *UTC* deve essere fatta solo in certe date e solo se la loro differenza supera in valore assoluto gli $0^s,900\ 000$Se si verificano queste condizioni si apportano le correzioni di un secondo all'*UTC* o al 1° Gennaio o al 1° di Aprile o al 1° di Luglio o al 1° di Ottobre.

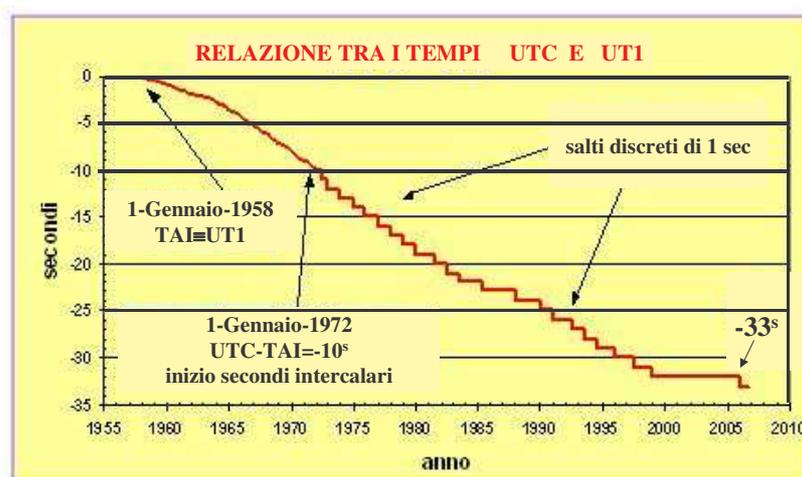


Fig. 58

In altri termini, gli Istituti preposti alla diffusione dei segnali orari quando è necessario una o più volte all'anno, o in alcuni casi nessuna volta all'anno (se per caso la **Terra** recupera per quell'anno), inseriscono un **Secondo Intercalare** all'ora segnata dagli orologi, nel senso che alle ore $23^h\ 59^m\ 59^s,00$ del **31 Dicembre** di un certo anno, un secondo di tempo dopo, gli orologi invece di segnare le ore $00^h\ 00^m\ 00^s,00$ del **1° Gennaio** dell'anno successivo segnano le ore $23^h\ 59^m\ 60^s,00$ del giorno precedente per poi ripartire, con il secondo di tempo successivo, con le ore $00^h\ 00^m\ 00^s,00$ del **1° Gennaio**.

A titolo di cronaca è dal **Dicembre del 1998** che non si aggiungono secondi intercalari positivi, in quanto per tutto gli anni tra il **1999 e il 2005** non c'è stato più bisogno di questa correzione, poiché la **Terra**, almeno per quegli anni, ha recuperato la rotazione che aveva quando è stata introdotta questa **Scala di Tempo**, per cui la differenza tra *TAI* e *UTC* ammonta a **+33 secondi** al **1° Gennaio 2006**.

In realtà quando viene introdotto un secondo intercalare è come se noi fisicamente mettessimo indietro di un secondo i nostri orologi. Infatti immaginiamo la cosa dal punto di vista osservativo. Se potessimo vedere il **Sole Medio Fittizio** muoversi in cielo noi noteremmo che questo passerebbe sempre ogni giorno alle ore $12^h\ 00^m\ 00^s,00$ di *UTC* al meridiano centrale dell'Europa Centrale (passante incidentalmente per Catania) ammettendo che la **Terra** mantenga una rotazione rigorosamente costante. Se come effettivamente è successo la **Terra** ha rallentato globalmente di circa un secondo in un anno, rispetto all'epoca in cui è stato introdotto il *TAI*, noi noteremmo che dopo un anno (anche se la **Terra** mantenesse da ora in poi costante la nuova velocità di rotazione più lenta) il **Sole** passerebbe alle ore $12^h\ 00^m\ 01^s,00$, dopo due anni alle ore $12^h\ 00^m\ 02^s,00$ e così via negli anni successivi per cui nel corso dei secoli dopo **3600** anni il **Sole** passerebbe in meridiano a Catania alle ore $13^h\ 00^m\ 00^s,00$ cioè con un'ora di ritardo. Questo perché il "secondo di tempo terrestre" si è dilatato rispetto al secondo del *TAI*. In realtà se il rallentamento della **Terra** fosse costante e regolare nel tempo (1 secondo ogni anno) i ritardi accumulati anno dopo anno rispetto al *TAI* andrebbero con il quadrato del ritardo annuo, nel senso che dopo un anno si avrebbe uno scostamento di 1 secondo,

dopo due anni di $2^2 = 4$ secondi ,dopo 3 anni di $3^2 = 9$ secondi e così via.

La decisione di quando inserire il secondo di tempo intercalare venne presa **dall'International Earth Rotation Service IERS**, con sede centrale, ora, a Francoforte, basata sull'osservazione dell'orientamento nello spazio della **Terra** e pubblicata nei **Bollettini C dell'IERS di Parigi** (vedi **Tabella 5**)

Gli orologi atomici quindi servono a generare l'ora **UTC** che a sua volta sommata o sottratta allo scarto generalmente intero di ore dovuto ai fusi orari fornisce **l'Ora di Zona locale (cioè il TMEC per l'Europa Centrale che è avanti di un'ora esatta rispetto all' UTC)**

Nel mondo l'**UTC** viene diramato dal **Master Clock dell'U.S. Naval Observatory di Washington e dal Bureau International des Poids et Mesures (BIPM)**.

In realtà queste due **Scale di Tempo** differiscono di pochi nanosecondi (miliardesimi di secondo) e la ragione per cui il **BIPM** non può usare direttamente l'**UTC** come tempo ufficiale è perché questo è conosciuto solo a posteriori quando vari orologi atomici sono stati letti.

Il segnale orario che generalmente sentiamo emesso dalla **RAI (SRC)** e diffuso in Italia **dall'Istituto Elettrotecnico Galileo Ferraris di Torino**, e' la realizzazione pratica dell'**UTC** aumentato di un'ora esatta (di 2 ore esatte quando è in vigore l'ora legale estiva). Esso è costituito da un codice di datazione suddiviso in due segmenti di informazione, generati in corrispondenza dei secondi 52 e 53, e di sei impulsi acustici sincroni con i secondi **54, 55, 56, 57, 58 e 00**. Nella **Figura 59** e' riportato lo schema temporale delle emissioni dei vari elementi che costituiscono il segnale orario emesso dalla **RAI**.

Il primo segmento chiamato con **S1** in **Figura 59** ed esplicitato nella **Figura 60** contiene l'indicazione delle ore (da 0 a 23), dei minuti, del numero ordinale del mese, del giorno del mese, del numero d'ordine del giorno della settimana, e dell'adozione dell'ora solare (**Tempo Medio dell'Europa Centrale (TMEC)**) o di quella estiva. L'informazione del secondo coincide con l'istante iniziale di ogni segmento oltre che con quello degli impulsi acustici.

Tabella 5

INTERNATIONAL EARTH ROTATION SERVICE (IERS)
SERVICE INTERNATIONAL DE LA ROTATION TERRESTRE

SERVICE DE LA ROTATION TERRESTRE
OBSERVATOIRE DE PARIS
61, Av. de l'Observatoire 75014 PARIS (France)
Tel. : 33 (0) 1 40 51 22 26
FAX : 33 (0) 1 40 51 22 91
Internet : iers@obspm.fr

Paris, 8 July 2002

Bulletin C 24

To authorities responsible
for the measurement and
distribution of time

INFORMATION ON UTC - TAI

NO positive leap second will be introduced at the end of December 2002.
The difference between UTC and the International Atomic Time TAI is :

from 1999 January 1, 0h UTC, until further notice : UTC-TAI = -32 s

Leap seconds can be introduced in UTC at the end of the months of December or June, depending on the evolution of UT1-TAI. Bulletin C is mailed every six months, either to announce a time step in UTC, or to confirm that there will be no time step at the next possible date.

Daniel GAMBIS
Director
Earth Orientation Center of IERS

SEGNALE ORARIO DIFFUSO DALLA RAI

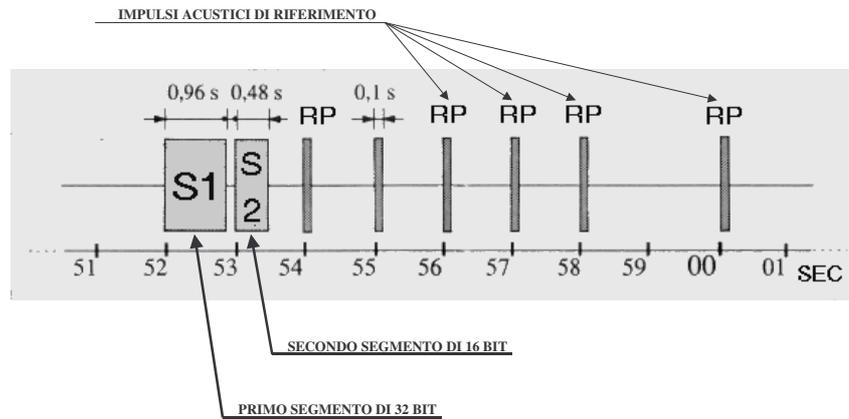


Fig. 59

SUDDIVISIONE DEL SEGMENTO S1 DEL SEGNALE ORARIO RAI

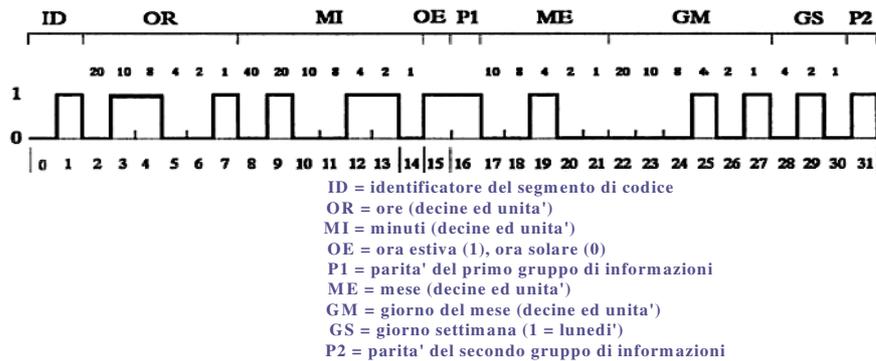


Fig. 60

Il secondo segmento (S2) di **Figura 61** contiene l'informazione dell'anno corrente in decine ed unità, il preavviso del cambio da ora solare estiva o viceversa, con sei giorni di anticipo, e la segnalazione dell'approssimarsi dell'introduzione del secondo intercalare.

A titolo di cronaca si ricorda che il massimo ritardo con cui l'utente riceve questi segnali e' dell'ordine di 12 millisecondi, mentre la precisione di sincronizzazione può essere migliore del millisecondo.

SUDDIVISIONE DEL SEGMENTO S2 DEL SEGNALE ORARIO RAI

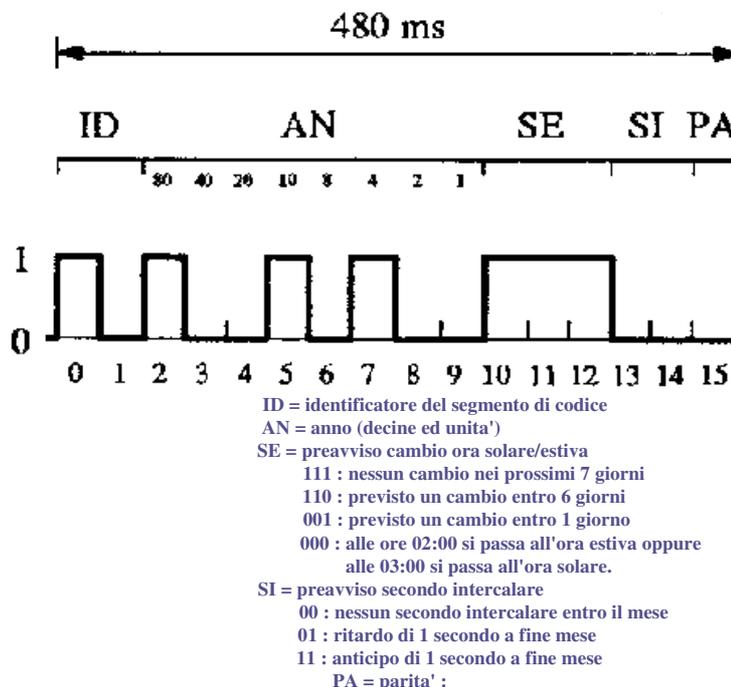


Fig. 61

GPS Time

Un'ultima , per il momento , **Scala di Tempo**, che ha acquisito una rilevanza molto importante in questi ultimi anni per le implicazioni tecnologiche che ha prodotto nel campo della navigazione sia marittima che terrestre é il **Global Positioning System Time (GPST)**, cioè la **Scala di Tempo** utilizzata dai navigatori satellitari **GPS** che in questi ultimi tempi hanno avuto una particolare diffusione nel settore automobilistico. Infatti questi strumenti fino ad alcuni anni fa venivano utilizzati solo dalla marina e dall'aviazione, mentre oggi non è difficile trovarli installati anche sulle nostre automobili.

Lo scopo principale di questi strumenti è quello di fornire la posizione geografica di qualsiasi punto della **Terra** in cui essi si trovino, con la massima precisione possibile. Poiché le coordinate geografiche dei vari luoghi vengono determinate, con questo sistema, sulla base del tempo impiegato dai segnali emessi da un certo numero di satelliti in orbita intorno alla **Terra** per arrivare al ricevitore **GPS** al suolo, diventa di cruciale importanza la determinazione quanto mai precisa dell'intervallo di tempo intercorso tra l'emissione e la ricezione del segnale emesso dai vari satelliti.

Fenomeni che alterano le coordinate apparenti degli Astri

Introduzione

Come è stato detto in precedenza il moto apparente delle **Stelle** avviene in maniera solidale da **Est** verso **Ovest** per effetto della rotazione assiale della **Terra**. In altri termini tutto il cielo ruota ma la distanza angolare relativa fra le **Stelle** sembra rimanere fissa anche con il trascorrere degli anni. In realtà, ad un esame più attento del cielo, si può constatare che tutte le **Stelle** sono dotate di piccoli moti, impercettibili ad occhio nudo ma ben quantificabili con la strumentazione astronomica oggi disponibile. I moti che si possono osservare e misurare e che alterano le coordinate apparenti delle **Stelle**, si possono suddividere in più categorie.

Alla prima categoria appartengono tutti i moti Stellari causati per riflesso dal **moto di rotazione assiale della Terra e dal moto di rivoluzione** di questa intorno al **Sole**, come il moto dovuto al fenomeno della **Precessione Generale**, della **Nutazione e della Polodia**, visti nei paragrafi precedenti, nonché altri fenomeni come la **Parallasse Diurna, la Parallasse Annuale, l'Aberrazione Astronomica Diurna e Annuale**. Alla seconda categoria appartiene la **Deflessione Relativistica della Luce**, vista nelle pagine precedenti, e la **Rifrazione Astronomica** che pur alterando la posizione degli astri non dipende dal moto di rotazione e rivoluzione della **Terra**. Infine esiste una terza categoria di moti, come i moti casuali delle **Stelle (Moti Propri Peculiari)**, i moti indotti sulle **Stelle** dal moto del **Sole** verso la direzione **dell'Apice Solare** ed i moti di tutto il complesso di **Stelle** locali intorno al **Centro della Galassia (Rotazione Differenziale)**

Nelle pagine seguenti tratteremo in dettaglio alcuni dei fenomeni che non sono stati presi in considerazione nelle pagine precedenti come: **la Rifrazione Astronomica, la Parallasse Annuale, l'Aberrazione Annuale ed i Moti Propri delle Stelle**, questi ultimi intesi come i moti che inglobano i **Moti Propri Peculiari**, il **Moto Solare Riflesso** e il **Moto Differenziale di Rotazione Galattico**, anch'esso riflesso.

Trascureremo volutamente i fenomeni minori che verranno accennati più avanti quando si vedrà concretamente come si possono ottenere le coordinate di puntamento di un telescopio sito in un qualsiasi luogo della **Terra** e per una certa epoca di osservazione, partendo dalle coordinate di un **Catalogo Fondamentale (vedi Appendice C)**.

Rifrazione Astronomica

Come è noto la **Terra** è avvolta da uno spesso strato di atmosfera alto circa un centinaio di Km, che diventa via via più denso man mano che ci si avvicina alla superficie terrestre. Questo strato di aria ha la capacità di assorbire parte della radiazione proveniente dallo spazio ed anche di deviare il percorso della luce dal suo moto naturale rettilineo e uniforme.

Inoltre i raggi di luce che provengono dallo spazio quando entrano nell'atmosfera terrestre subiscono una rifrazione che dipende oltre che dalla densità del mezzo attraversato anche dalla lunghezza d'onda λ della sorgente emittitrice.

In altri termini le lunghezze d'onda spostate verso il blu dello spettro continuo vengono deviate più delle corrispondenti lunghezze d'onda nel rosso.

Ma vediamo ora come opera l'atmosfera terrestre sulla posizione apparente degli astri a seconda che questi si trovino a differenti altezze sull'orizzonte. Per comprendere bene il fenomeno facciamo

riferimento alla **Figura 62** in cui viene simulata l'osservazione di un astro la cui posizione vera è rappresentata dalla stellina verde mentre la posizione apparente (che effettivamente si osserva) è rappresentata dalla stellina rossa. Immaginiamo inoltre di considerare la superficie terrestre piatta e non sferica (approssimazione ammessa per questo fenomeno) e di suddividere lo strato atmosferico in tanti gusci paralleli alla superficie aventi ciascuno un indice di rifrazione diverso che va da $\mu_0=1$ (nel vuoto) a $\mu_n=1,000293$ al livello del mare. Pertanto se un raggio di luce proveniente da un astro osservato fuori dell'atmosfera mostra una distanza zenitale $z = z_0$, quando attraversa il primo guscio subisce una rifrazione che dipende dal valore dell'indice di rifrazione μ_1 di quel guscio (che sarà necessariamente maggiore di 1), facendo diminuire il valore della distanza zenitale da z a z_1 secondo la seconda legge di **Snell** sulla rifrazione:

$$\mu_0 \sin z_0 = \mu_1 \sin z_1$$

Questo raggio a sua volta sarà rifratto nel guscio sottostante facendo passare la distanza zenitale da z_1 a z_2 e così via in cascata per tutti i gusci sottostanti fino ad arrivare al guscio aderente al terreno dove la distanza zenitale assume il valore z_n relativamente ad un indice di rifrazione $\mu_n= 1,000293$ riferito al livello del mare e alla pressione atmosferica di 760 mm di mercurio (1 atmosfera). Combinando ciclicamente la legge di **Snell** vista sopra e sfruttando la proprietà transitiva delle equazioni si può eguagliare il primo membro della prima equazione del sistema di **Figura 62** con il secondo membro dell'ultima equazione nel seguente modo :

$$\mu_0 \sin z_0 = \mu_n \sin z_n$$

che messa in altra forma, concordemente con la **Figura 62** diventa:

$$\sin z = \mu_n \sin z'$$

ponendo inoltre $z = z' + R$ (dove R rappresenta il valore della **Rifrazione alla distanza zenitale** z') si arriva dopo alcuni passaggi (mostrati in **Figura 62**) alla seguente relazione:

$$R = (\mu_n - 1) \tan z' = R_0 \tan z' = 0,000293^{rad} \tan z' = 60'',43 \tan z'$$

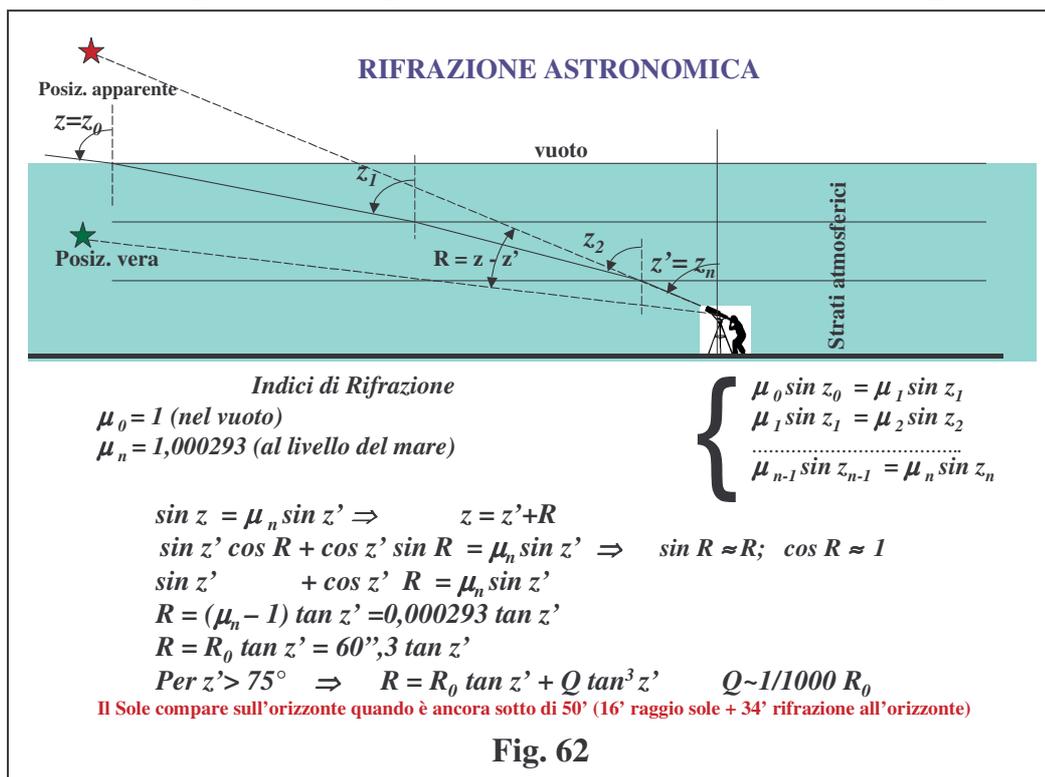
Questo valore è stato trovato assumendo che la radiazione osservata emetta nel visibile. Nell'utilizzo di lastre fotografiche più sensibili alla radiazione blu il coefficiente R_0 assume un valore più alto ($R_0 = 60'',9$) poiché la radiazione nel blu, come detto precedentemente, subisce una rifrazione maggiore che nella banda media del visibile.

Tuttavia questa formula è sufficientemente accurata per distanze zenitali degli astri non superiori ai 75° circa in quanto gli strati più bassi dell'atmosfera hanno indici di rifrazione non più rappresentabili con la suddetta formula. Una formula più accurata, però sempre valida per distanze zenitali $z' < 75^\circ$ contiene un termine aggiuntivo del terz' ordine :

$$R = R_0 \tan z' + Q \tan^3 z' \quad \text{dove } Q = - 0'',067 \sim -1/1000R_0$$

Occorre ricordare che anche questa formula ha i suoi limiti poiché quando gli oggetti sono prossimi all'orizzonte la rifrazione cresce in maniera esponenziale ed è molto mutevole a seconda delle condizioni atmosferiche del momento. In questi casi si ricorre a delle tavole basate su dati empirici di osservazione. Il caso limite si ha quando il **Sole** è prossimo al tramonto. Infatti in questo caso il **Sole** subisce una deviazione verso l'alto di ben **34'**. In tal maniera il bordo del disco solare sparisce sotto l'orizzonte quando il suo centro si trova **50'** sotto di esso poiché al valore dovuto alla rifrazione bisogna aggiungere anche il raggio angolare del **Sole** che è di **16'** per cui l'effetto totale ammonta a **34'+16'=50'**. Il fatto che il disco solare sull'orizzonte non appaia sferico dipende dalla rifrazione differenziale esistente tra il bordo superiore ed inferiore del **Sole**, poiché il bordo inferiore più vicino all'orizzonte subisce una deviazione verso l'alto più forte del bordo superiore con conseguente schiacciamento del disco solare. Invece il fatto di apprezzare una dimensione angolare più grande del **Sole** quando questo si trova sull'orizzonte rispetto a quello che si osserva quando è alto in cielo dipende da un fenomeno psicofisico di accomodamento dell'occhio sul paesaggio che si interpone davanti al disco solare al tramonto. In realtà se misurassimo il diametro angolare del **Sole** con un teodolite troveremmo un valore che sarebbe pressoché uguale (se non addirittura inferiore per via della rifrazione differenziale esistente tra i bordi superiore e inferiore del Sole che lo fanno apparire schiacciato) sia sull'orizzonte che in pieno cielo.

Si ricorda che nelle misure di posizioni degli astri in cui si richiedono precisioni dell'ordine del millesimo di secondo d'arco ed oltre è indispensabile tenere conto del fenomeno della rifrazione basandosi anche sulla lunghezza d'onda predominante emessa da una **Stella**. (vedi più avanti).



Parallasse Trigonometrica Annuale

Con il termine di **Parallasse Trigonometrica Annuale** π si intende l'angolo sotto il quale da una **Stella S**, relativamente vicina a noi, si osserva il semiasse maggiore medio **Terra-Sole** ($a = 1 \text{U.A.} = 149.597.870,691 \text{km}$) in maniera tale che il triangolo generato dal sistema **Sole-Terra-Stella** formi un

angolo retto nel Sole O (vedi **Figura 63**). Poiché l'angolo π è sempre molto piccolo in quanto la distanza della **Stella** dal **Sole** è sempre decisamente più grande di migliaia o milioni di volte la distanza **Terra Sole**, ne segue che possono valere le seguenti relazioni che legano tra di loro a , d , π

$$\tan(\pi) = \sin(\pi) = \pi^{rad} = \frac{a}{d}$$

sapendo che $1^{rad} = 180^\circ \cdot 3.600/3,14159 \cong 206.265$ secondi d'arco e che a , d sono espresse in **Unità Astronomiche**, la **Parallasse** π trasformata in secondi d'arco diventa:

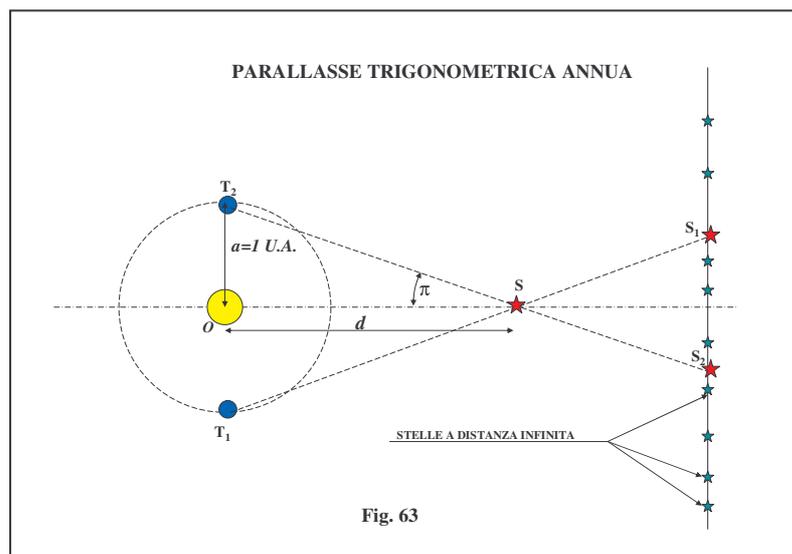
$$\pi'' = 206.265 \cdot \frac{a}{d}$$

Poiché in astronomia alle volte è conveniente citare la distanza della **Stella** piuttosto che il valore della **Parallasse** si è convenzionalmente definita la distanza di una **Stella** in **Parsec** come l'inverso della sua **Parallasse Trigonometrica**, nel senso che una **Parallasse** di 1 secondo d'arco corrisponde ad **1 parsec**, di **0",5 a 2 parsec**, di **0",25 a 4 parsec** e così via secondo la relazione seguente:

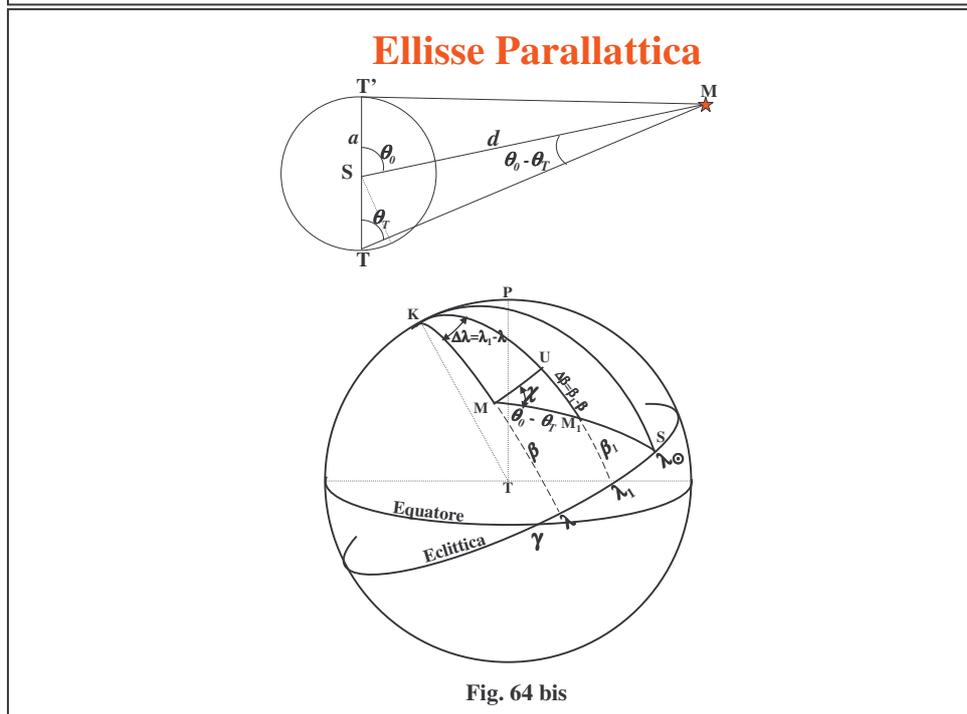
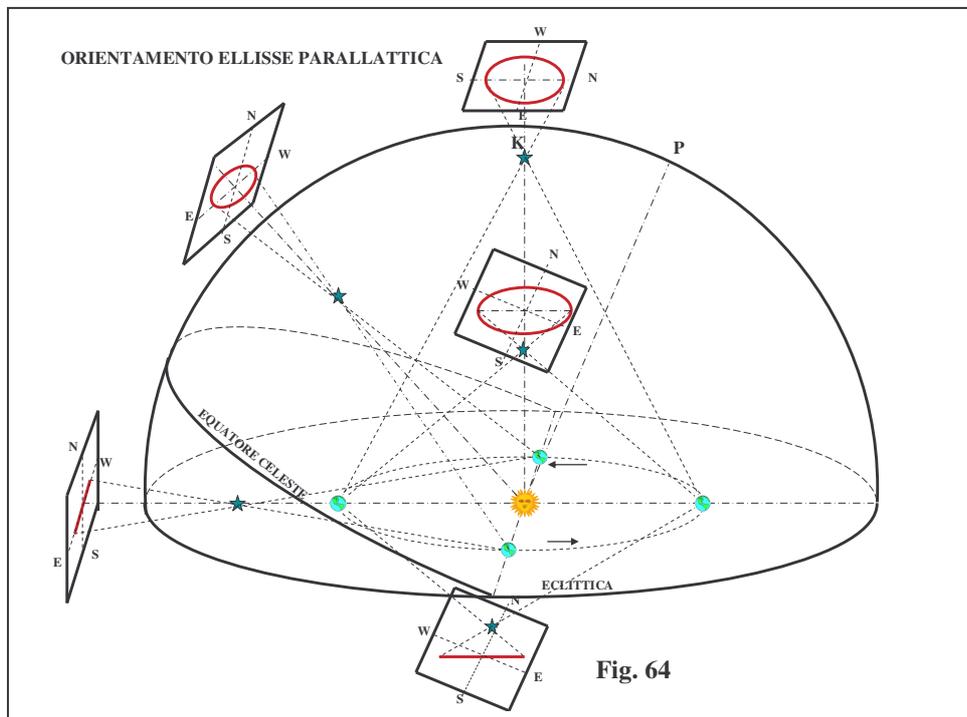
$$d = \frac{1}{\pi''} \quad (\text{parsec})$$

In realtà quello che osserviamo da **Terra** è lo spostamento apparente della **Stella** vicina S proiettata sullo scenario di **Stelle** deboli e presumibilmente molto più lontane di quella in esame. Infatti se la **Stella** fosse esattamente sul piano dell'**Eclittica** lo spostamento dovuto alla **Parallasse** sarebbe proprio quello indicato in **Figura 63**. La **Stella** S si proietta in S_1 quando la **Terra** è in T_1 mentre la si vede in S_2 quando la **Terra** è in T_2 . Lo spostamento angolare della **Stella** S rispetto a quelle di sfondo dedotto dal moto della **Terra** intorno al **Sole** nell'arco di 6 mesi dalla posizione T_1 a quella T_2 si traduce in uno spostamento rettilineo della **Stella** da S_1 a S_2 che corrisponde al doppio del valore della **Parallasse** annua π . Dalla **Figura 63** si intuisce che le migliori condizioni di osservazione per avere uno spostamento angolare massimo della **Stella** di **Parallasse** si hanno all'alba quando la **Terra** è nella posizione T_1 e subito dopo il tramonto del **Sole** quando la **Terra** è in T_2 .

Ovviamente il percorso angolare apparente di S sullo sfondo di **Stelle** avviene secondo un moto rettilineo altalenante per i primi 6 mesi da S_1 a S_2 e poi per altri 6 mesi da S_2 a S_1 e così di seguito, ma solo per **Stelle** che stanno sul piano dell'**Eclittica**.



Per **Stelle** vicine che occupano altre posizioni in cielo il movimento parallattico avviene secondo altre geometrie come illustrato nella **Figura 64**. In **Figura 64 bis**, invece, si dimostra come il moto parallattico assuma generalmente nel corso di un anno la forma di un'ellisse, detta **Ellisse Parallattica**.



Infatti dalla immagine in alto di **Figura 64 bis** si osserva come varia l'angolazione di una **Stella M** vista sia dal **Sole S** che dalla **Terra T** rispetto alla direzione **T'** che assume la **Terra** 6 mesi dopo. Da questi elementi si ricava la seguente relazione:

$$\sin(\vartheta_0 - \vartheta_T) = \frac{a}{d} \cdot \sin \vartheta_T$$

Definiamo invece con:

$$\sin \pi = \frac{a}{d}$$

il seno dell'angolo sotto il quale è visto il semiasse maggiore **a** della **Terra** dalla stella **M**, il cui triangolo formato dai 3 astri risulti retto in **T** (o **T'**).

Poiché le stelle sono a distanze notevoli se confrontate con la distanza **Terra Sole** (la più vicina è **Proxima Centauri** e dista **267.000** volte la distanza **Terra-Sole**) si può ragionevolmente assumere che:

$$(\vartheta_0 - \vartheta_T) = \pi \cdot \sin \vartheta_0$$

avendo approssimato $\sin(\theta_0 \text{ a } \theta_T)$ con $(\theta_0 \text{ a } \theta_T)$ e $\sin \pi$ con π in quanto angoli molto piccoli.

A questo punto consideriamo la **Sfera Celeste** centrata in **T** (vedi disegno in basso di **Figura 64 bis**)

Sia **M** la posizione della **Stella** vista da un osservatore **eliocentrico** ed **S** la posizione del **Sole** ad una certa epoca. Se **M₁** è la posizione della stella sulla **Sfera Celeste** vista da un osservatore **geocentrico** allora **M₁** sta nel piano **MTS** e quindi **M₁** sta su di un arco di cerchio massimo tra **M** e **S**.

Se con λ e β indichiamo la **longitudine e latitudine Eclittica Eliocentrica della Stella** e λ_1 e β_1 le analoghe **coordinate geocentriche**, con **UM** l'arco di cerchio parallelo all'**Eclittica**, con χ l'angolo **UMM₁** e con:

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda$$

$$\Delta\beta = \beta_1 - \beta$$

allora :

$$UM = \Delta\lambda \cdot \cos \beta = \pi \cdot \sin \vartheta_0 \cdot \cos \chi$$

$$UM_1 = -\Delta\beta = -\pi \cdot \sin \theta_0 \cdot \sin \chi$$

Consideriamo ora il triangolo **KMS** di **Figura 64 bis** (in basso) in cui **MKS**= $\lambda_0 - \lambda$, dove λ_0 è la **longitudine vera del Sole**; inoltre **KS**= 90° , **KM**= $90^\circ - \beta$, **KMS**= $90^\circ + \chi$. Per la **seconda formula di trigonometria sferica** si ha:

$$\frac{\sin \vartheta_0}{\sin(\lambda_0 - \lambda)} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin(90^\circ + \chi)}$$

quindi:

$$\sin \vartheta_0 \cdot \cos \chi = \sin(\lambda_0 - \lambda)$$

Invece applicando la **terza formula di trigonometria sferica** al triangolo **KMS** si ha:

$$\sin \vartheta_0 \cdot \cos(90^\circ + \chi) = \cos 90^\circ \cdot \sin(90^\circ - \beta) - \sin 90^\circ \cdot \cos(90^\circ - \beta) \cdot \cos(\lambda_0 - \lambda)$$

che semplificata diventa:

$$\sin \vartheta_0 \cdot \sin \chi = \sin \beta \cdot \cos(\lambda_0 - \lambda)$$

Sostituendo queste ultime espressioni in **UM** e **UM₁**, chiamando questi ultimi rispettivamente **x** e **y** e ponendo $\pi = a$ e $\pi \sin \beta = b$ si ha che:

$$x = \Delta\lambda \cdot \cos \beta = \pi \cdot \sin(\lambda_0 - \lambda) = a \cdot \sin(\lambda_0 - \lambda)$$

$$y = \Delta\beta = \pi \cdot \sin \beta \cdot \cos(\lambda_0 - \lambda) = b \cdot \cos(\lambda_0 - \lambda)$$

Dividendo la x per a e la y per b , quadrando e sommando si arriva alla seguente relazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2(\lambda_0 - \lambda) + \cos^2(\lambda_0 - \lambda) = 1$$

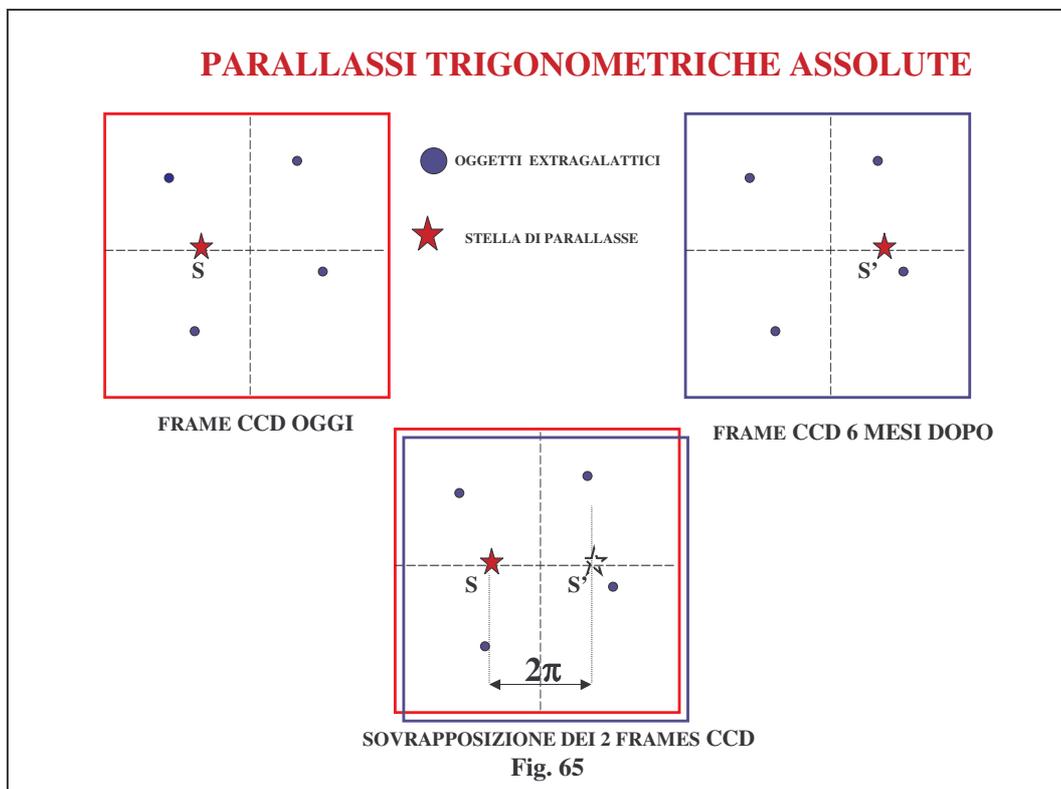
che è proprio l'equazione dell'**Ellisse Parallattica** con semiasse $a=\pi$ e semiasse $b=\pi \sin \beta$

Come è inoltre possibile vedere dalla **Figura 64** le **Stelle** vicine che stanno sull'**Eclittica** descrivono moti parallattici paragonabili a dei segmenti, mentre **Stelle** a latitudini eclittiche intermedie tra 0° e $\pm 90^\circ$ mostrano nel corso di un anno spostamenti angolari ellittici che diventano praticamente circolari (vista la bassa eccentricità dell'orbita terrestre) solo se la latitudine **Eclittica** è esattamente $+90^\circ$ o -90° (vedi anche dimostrazione vettoriale dello spostamento parallattico in **Appendice D**).

Anche l'orientamento del segmento o dell'ellisse all'interno del frame **CCD** o della lastra fotografica dipende dalla posizione della **Stella** in cielo in quanto usualmente i loro bordi sono orientati secondo la direzione dell'**Equatore Celeste** e del meridiano passante per la **Stella**, per cui ad esempio una **Stella** che sta sull'**Eclittica** con $\alpha=0^h$ o $\alpha=12^h$ mostrerà un segmento inclinato del valore dell'obliquità dell'**Eclittica** (circa $23^\circ,5$) rispetto ai lati del frame, mentre sarà parallelo a questi se $\alpha=6^h$ o $\alpha=18^h$ (vedi **Figura 64**)

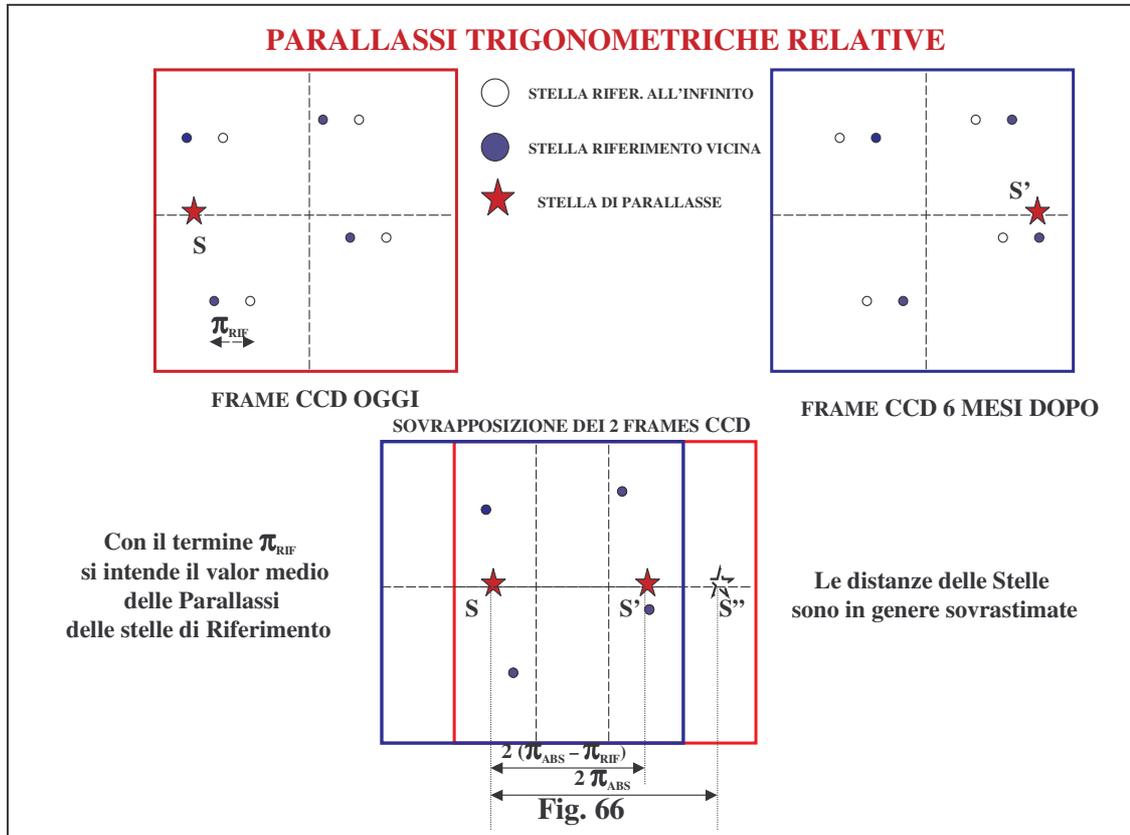
A questo punto vediamo come praticamente si determina la **Parallasse Trigonometrica**.

Immaginiamo di prendere un frame CCD oggi, contenente una **Stella** vicina di cui si vuole determinare la **Parallasse** ed un altro frame 6 mesi dopo. Se avessimo la fortuna di avere come oggetti di riferimento oggetti extragalattici a distanza praticamente infinita e quindi privi di **Parallasse**, come è sintetizzato dai 4 cerchietti in ciascun frame di **Figura 65**, sarebbe immediato intuire che sovrapponendo idealmente i due frames, presi nell'arco di 6 mesi, facendo coincidere le immagini degli oggetti extragalattici la **Stella** mostrerebbe uno spostamento dalla posizione S a quella S' che in questo caso rappresenterebbe proprio il doppio del valore della **Parallasse** π (vedi la terza immagine di **Figura 65**).



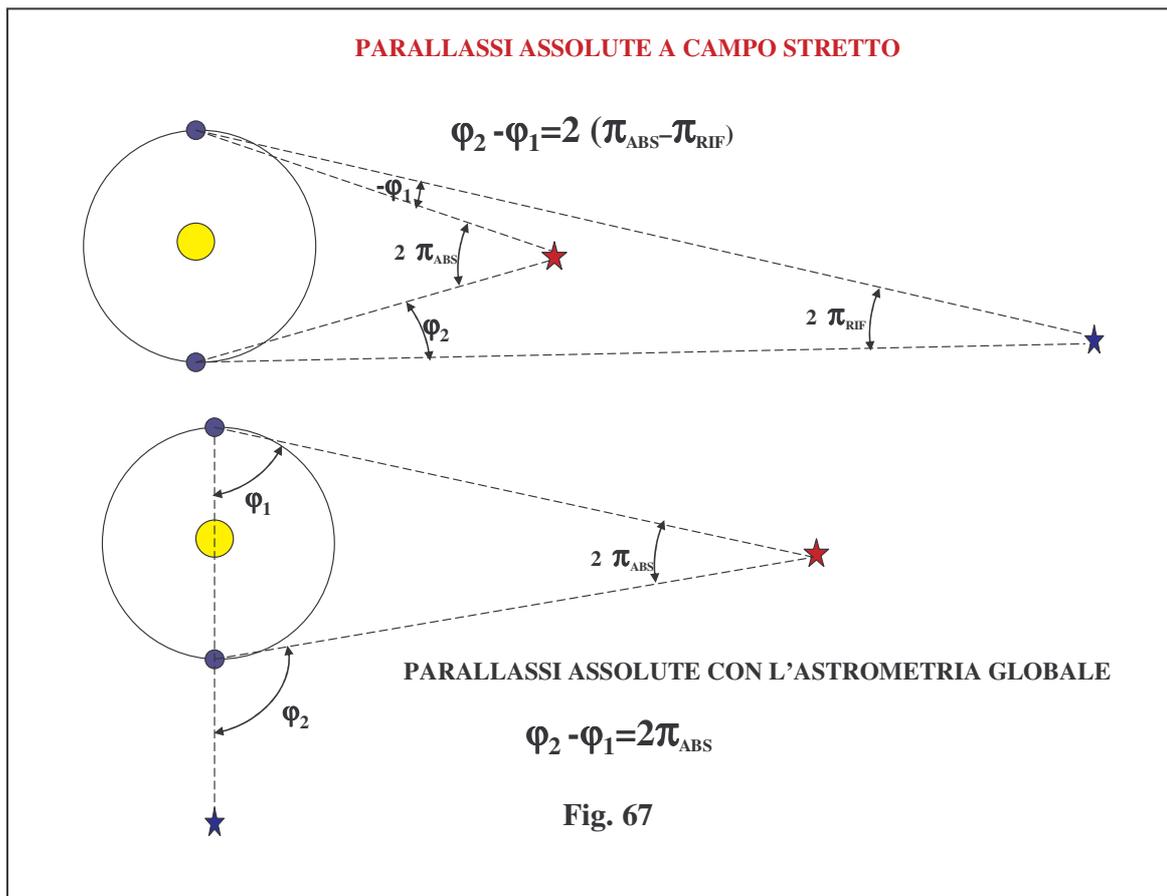
Sfortunatamente trovare oggetti extragalattici in un frame CCD è altamente improbabile per cui dobbiamo fare riferimento a **Stelle** di campo molto più deboli di quella di **Parallasse** e quindi ad oggetti presumibilmente più lontani con parallassi piccole ma non nulle. In questo caso se sovrapponessimo due frames CCD presi nell'arco di 6 mesi facendo coincidere le **Stelle** deboli di riferimento, quello che si osserverebbe sarebbe uno spostamento della **Stella S** in **S'** più piccolo di quello che si avrebbe avuto se ci fossero stati oggetti extragalattici anziché **Stelle** deboli di riferimento come è possibile vedere dalla **Figura 66**, in cui la **Stella** si sposterebbe in **S''**. In altri termini prendendo **Stelle** deboli come oggetti di riferimento si stimerebbero **parallassi più piccole** e di conseguenza si **sovrastimerebbero le distanze**. Quindi le parallassi che si misurano in genere dai frames CCD sono "**Parallassi Relative**" poiché queste inglobano anche le parallassi medie delle **Stelle** di riferimento. Se con qualche artificio si riuscisse a conoscere la **Parallasse** delle **Stelle** di riferimento allora in questo caso si riuscirebbe a valutare l'effettiva Parallasse o distanza della **Stella**. In questo caso le parallassi vengono dette "**Assolute**". In genere l'artificio utilizzato è quello di scegliere **Stelle** di riferimento deboli di uguale luminosità e colore. In tal modo tutte le **Stelle** di riferimento dovrebbero trovarsi alla stessa distanza e di queste si potrebbe dare una valutazione della loro distanza dal punto di vista fotometrico, nel senso che se di una **Stella** se ne conosce il tipo e la classe spettrale, con una certa ragionevolezza se ne conosce anche la sua **Magnitudine Assoluta** (paragonabile alla **Magnitudine Apparente** a **10 parsec** di distanza) e tramite la seguente relazione se ne può ricavare la distanza **d** in parsec

$$M - m = 5 - 5 \log d_{(pc)}$$



In realtà anche con l'artificio delle parallassi fotometriche le parallassi trigonometriche che si calcolano non possono considerarsi **Assolute** in senso stretto, poiché la valutazione delle parallassi fotometriche delle **Stelle** di riferimento è indicativa ma non necessariamente precisa.

Un sistema di osservazione che può darci la certezza di avere **Parallassi Assolute** attendibili è quello che si può realizzare dallo spazio, utilizzando un telescopio che punta contemporaneamente due zone di cielo molto distanti angularmente tra di loro come è schematizzato nella seconda immagine della **Figura 67**. Infatti se i campi di vista del telescopio spaziale sono separati di diversi gradi, un suo campo di vista può essere indirizzato verso la **Stella** di riferimento (cerchio blu in figura) mentre l'altro campo verso la **Stella di Parallasse (Stella rossa in figura)**. Sei mesi dopo la **Stella** di riferimento si trova in congiunzione con il **Sole**, ma essendo osservata dallo spazio risulta visibile, per cui lo stesso campo di vista può essere diretto verso questa **Stella** mentre l'altro campo sulla **Stella di Parallasse** (rossa). Mentre la **Stella** blu non ha mostrato alcun spostamento parallattico nel corso dei 6 mesi (a parte eventuali **Moti Propri casuali** di cui discuteremo più avanti) la **Stella** rossa si è mossa per effetto parallattico proprio della differenza della quantità angolare $\varphi_2 - \varphi_1 = 2 \pi_{(Abs)}$. In questo caso la **Parallasse** che si ottiene da queste osservazioni è proprio la "**Parallasse Assoluta**", cioè priva di effetti residui dovuti al moto parallattico delle **Stelle** di riferimento. Proprio con questo genere di osservazioni ha lavorato la missione spaziale Astrometrica **Hipparcos dell'ESA dal 1989 al 1993** determinando la distanza (o il che è equivalente la **Parallasse Assoluta**) di **118.000 Stelle con una accuratezza del millesimo di secondo d'arco**.



Analiticamente il metodo di riduzione per la determinazione della **Parallasse Trigonometrica** con osservazioni da **Terra** con CCD o lastre fotografiche può sintetizzarsi come segue.

Usualmente si effettuano delle osservazioni della **Stella di Parallasse** subito prima del sorgere del **Sole** quando questa è prossima al meridiano, cioè quando raggiunge la sua culminazione superiore. Quindi circa 6 mesi dopo si effettua un'altra osservazione subito dopo il tramonto sempre con la **Stella** prossima al meridiano.

Il perché si preferisce fare delle osservazioni all'alba e al tramonto dipende dal fattore parallattico in **Ascensione Retta** che risulta massimo in queste circostanze (vedi le formule del fattore parallattico P_x e P_y , che dipendono dall' α e dalla δ della **Stella** e dalla longitudine λ del **Sole**, riportate in **Figura 68**), mentre la ragione per cui è meglio osservare in meridiano risiede nel fatto che gli effetti di rifrazione differenziale tra la **Stella di Parallasse** e quelle di riferimento sono più bassi che lontano dal meridiano.

A questo punto si misurano le posizioni x e y delle **Stelle** di riferimento deboli e della **Stella di Parallasse** (in pixels e frazioni di pixel) per ogni frames CCD osservato.

Si ricorda che in linea teorica sono sufficienti due frames distanziati di 6 mesi per determinare la **Parallasse Relativa** della **Stella**. Tuttavia è preferibile effettuare più osservazioni protratte per alcuni anni in modo da ridurre statisticamente l'errore sulla **Parallasse** ed anche perché in questo modo si riesce a calcolare l'eventuale **Moto Proprio** della **Stella**.

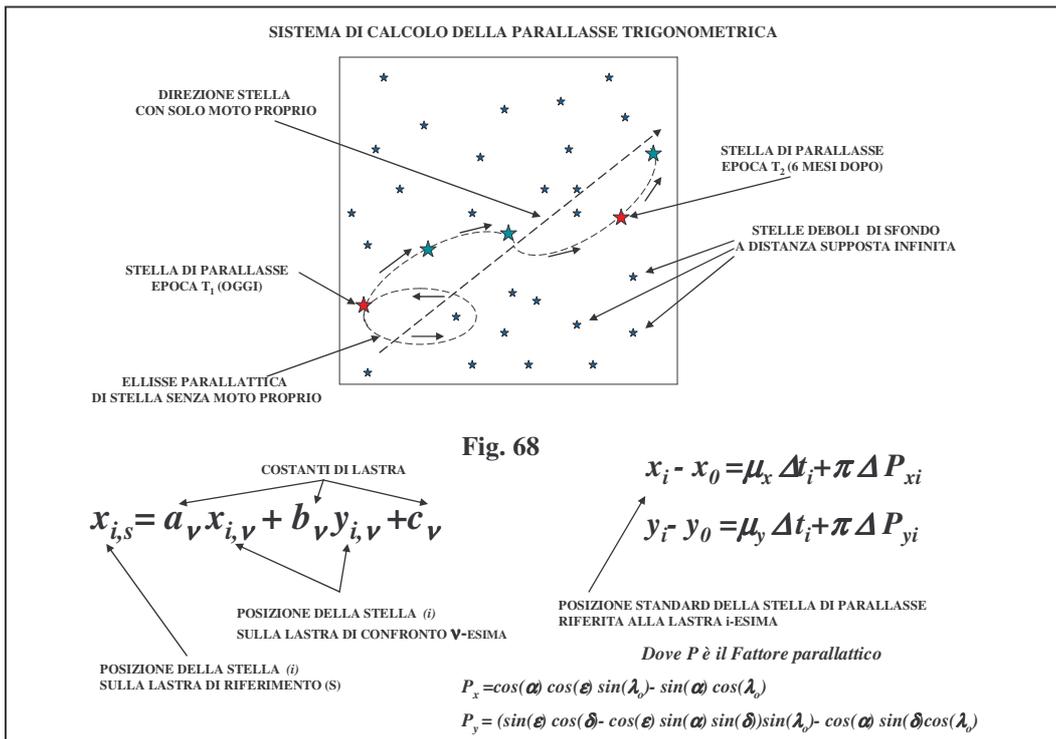
Come abbiamo visto prima, quando idealmente si sovrapponevano i frames per vedere lo spostamento parallattico della **Stella**, allo stesso modo dobbiamo operare per effettuare una sovrapposizione "analitica" dei frames in questione.

A questo scopo occorre impostare un sistema di equazioni in cui al primo membro si riportano le coordinate x e y note delle **Stelle** di riferimento (assunte in questo caso prive di **Parallasse**) dedotte da una frame di confronto intermedio tra tutti quelli presi, mentre al secondo membro sono riportate le coordinate x e y delle **Stelle** di riferimento legate a delle costanti chiamate **costanti di lastra (o CCD) a, b, c** relative al frame da confrontare con quello di riferimento.

Per ogni set di coordinate riferite ad un certo frame si ottengono le **costanti di lastra** dalla soluzione di un sistema di minimi quadrati ottenuti con tutte le **Stelle** di riferimento di quel frame (ad esempio 8 **Stelle** di riferimento (8 equazioni) in 3 incognite (a, b, c)) (vedi equazione delle costanti di lastra in **Figura 68**).

A ritroso con le costanti di lastra ottenute per quel frame si possono calcolare le coordinate della **Stella di Parallasse** riferite al frame intermedio di riferimento sostituendo i valori delle coordinate del frame nell'equazione (in questo caso il primo membro dell'equazione rappresenta il valore da trovare essendo noti tutti i termini del secondo membro).

Questa operazione la si effettua per tutti i frames a disposizione ottenendo così tanti gruppi di costanti di lastra quanti sono i frames meno uno e quindi tante coordinate della **Stella di Parallasse** questa volta però rapportate al frame intermedio. In altri termini con questa operazione è come se avessimo sovrapposto idealmente tutti i frames presi, sul frame intermedio di riferimento.



A questo punto la posizione generica di una **Stella di Parallasse** nelle coordinate x_i e y_i di un frame qualunque rapportata al frame intermedio di coordinate x_0 e y_0 può essere espressa mediante la seguente coppia di equazioni

$$x_i - x_0 = \mu_x \cdot (t_i - t_0) + \pi \cdot (P_{x_i} - P_{x_0}) = \mu_x \cdot \Delta t_i + \pi \cdot \Delta P_{x_i}$$

$$y_i - y_0 = \mu_y \cdot (t_i - t_0) + \pi \cdot (P_{y_i} - P_{y_0}) = \mu_y \cdot \Delta t_i + \pi \cdot \Delta P_{y_i}$$

Di equazioni in x e y ne abbiamo $n-1$ mentre di incognite ne abbiamo solo due μ e π

In realtà con il set di equazioni in x si ha il **Moto Proprio in x** che usualmente si assume coincidente con il **Moto Proprio in α** mentre con le y si ha il **Moto Proprio in δ** Il valore di π invece dovrebbe essere coincidente nei due set salvo errori di misura sistematici e accidentali.

Quindi la soluzione ai minimi quadrati sul set di $n-1$ equazioni in **2 incognite** porta alla determinazione dei valori della **Parallasse** e delle componenti del **Moto Proprio in α e δ**

Ovviamente se le coordinate x e y della **Stella di Parallasse** sono espresse in mm o in pixel o in arcsec anche i rispettivi valori del **Moto Proprio** e della **Parallasse** saranno espressi nelle medesime unità.

Tuttavia il passaggio da mm a secondi d'arco è semplice in quanto questi ultimi sono legati alla focale F del telescopio, nel senso che :

$$\Delta x'' = \frac{\Delta x^{mm}}{F^{mm}} \cdot 206264,81$$

Poiché il calcolo delle parallassi trigonometriche ottenute con la tecnologia attuale permette di raggiungere precisioni dell'ordine del millesimo di secondo d'arco è indispensabile applicare delle correzioni, alle coordinate delle **Stelle** di riferimento e di **Parallasse**, dovute alla rifrazione che subiscono le varie **Stelle** del frame CCD prima di applicare il metodo di riduzione sopra esposto.

Aberrazione Astronomica

Un altro fenomeno apparente che modifica la posizione degli astri è l'**Aberrazione Astronomica o Aberrazione Annuale**. Questo fenomeno fu scoperto da **Bradley** nel lontano 1728 il quale dimostrò sperimentalmente l'effettivo moto di rivoluzione della **Terra** intorno al **Sole**. Il principio su cui si basa questo fenomeno riguarda la composizione vettoriale della velocità della **Terra** intorno al **Sole** con la velocità della luce proveniente da un astro. Infatti la **Terra** nel suo moto di rivoluzione intorno al **Sole** viaggia mediamente ad una velocità di circa 30 Km/s mentre la luce proveniente da un astro indipendentemente dalla posizione che ha in cielo viaggia sempre alla velocità della luce che è di **circa 300.000 Km/s**.

Pertanto se facciamo riferimento alla **Figura 69** dove con **v** indichiamo la velocità della **Terra** intorno al **Sole** (supposta per comodità costante in tutto il percorso annuo) e con **c** la velocità della luce proveniente da una **Stella** complanare con l'**Eclittica**, ci rendiamo subito conto che l'angolazione secondo cui arriva la luce dalla **Stella** varia a seconda della posizione orbitale della **Terra**

Infatti quando **Sole Terra** e **Stella** sono allineati la componente della velocità della **Terra** è diretta in maniera perpendicolare alla direzione di provenienza della luce dalla **Stella** e dalla **Terra** si ha la sensazione che la **Stella** si muova con la stessa velocità della **Terra** ma in senso opposto al moto orbitale. In questo caso per poter osservare la **Stella** saremmo costretti ad orientare il nostro telescopio non secondo la direzione perpendicolare al moto terrestre ma inclinato secondo il moto orbitale di un angolo pari a:

$$\Delta\vartheta = \frac{v}{c} \cdot 206.265$$

Per altre posizioni orbitali della **Terra** rispetto alla **Stella** vale la seguente relazione generale deducibile facilmente anche dalla **Figura 69**

$$\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta' = \frac{v}{c} \operatorname{cosec}(1'') \cdot \sin(\vartheta) = K \cdot \sin(\vartheta)$$

Ricordiamo che il numero di secondi d'arco in un radiante può essere espresso anche con la cosecante di un secondo d'arco ($\operatorname{cosec}(1'') = 206.264,81$), mentre il valore di **K** chiamato **Costante dell'Aberrazione** è equivalente al rapporto $v/c \cdot \operatorname{cosec}(1'')$ e vale circa **20'',5**.

Quindi la formula precedente può anche scriversi

$$\Delta\theta = \theta - \theta' = 20'',5 \sin \theta$$

Risulta immediato comprendere che quando l'angolo formato tra la direzione del moto terrestre con la direzione del raggio di luce proveniente dalla **Stella** è di $\theta = 90^\circ$ si ha il massimo valore dell'aberrazione (**20'',5**), mentre quando la **Terra** si muove in direzione della **Stella** ($\theta=0^\circ$) si ha il minimo valore che in questo particolare caso è zero.

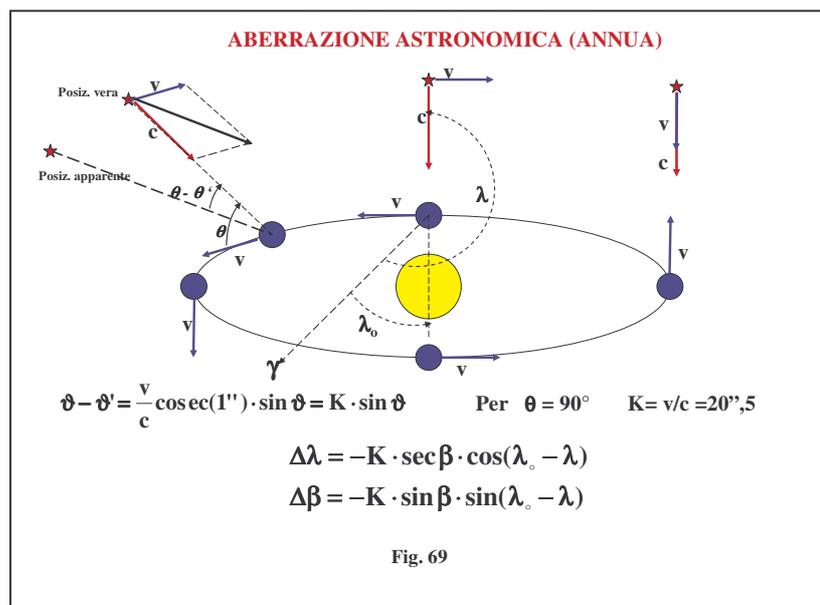
Ovviamente l'aberrazione rappresentata graficamente in **Figura 69** è quella che si avrebbe se le **Stelle** giacessero sul piano dell'**Eclittica**. In realtà per una qualsiasi posizione delle **Stelle** in cielo l'**Aberrazione** viene rappresentata nelle componenti eclittiche λ e β secondo le relazioni che non dimostriamo e che sono ottenute in maniera analoga a quelle valide per la parallasse trigonometrica:

$$\Delta\lambda = -K \sec \beta \cos(\lambda_0 - \lambda)$$

$$\Delta\beta = -K \sin \beta \sin(\lambda_0 - \lambda)$$

Dove λ e β sono le coordinate eclittiche della Stella, mentre λ_0 è la longitudine **Eclittica** del **Sole**. Ponendo $x = \Delta\lambda \cos \beta$ e $y = -\Delta\beta$ dividendo per K la x e per $K \sin \beta$ la y , quadrando e sommando si ha la relazione di un'ellisse analoga a quella **Parallattica** chiamata però **Ellisse dell'Aberrazione**

$$\frac{x^2}{K^2} + \frac{y^2}{K^2 \cdot \sin^2 \beta} = \sin^2(\lambda_0 - \lambda) + \cos^2(\lambda_0 - \lambda) = 1$$



Moto Proprio

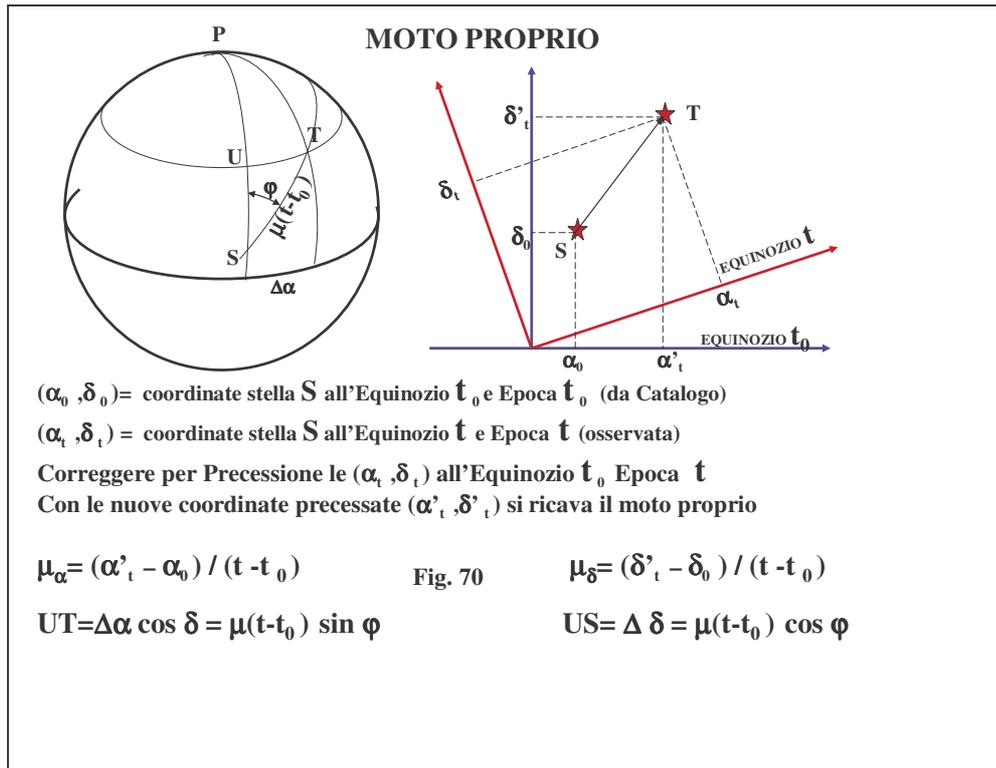
Per **Moto Proprio** si intende genericamente il moto angolare in cielo che mostra una **Stella** con il passar degli anni, come se questa fosse osservata dal baricentro del sistema solare o più semplicemente dal centro del **Sole**.

Si è scelto come origine il centro del **Sole** in quanto da questo sistema si osservano effettivamente i moti risultanti delle **Stelle** depurati dai moti apparenti introdotti dalla **Rifrazione Astronomica**, dalla **Parallasse Diurna e Annuale** e dalla **Aberrazione Diurna e Annuale**.

Pertanto i Moti Propri che si osserverebbero dal centro (baricentro) del **Sole** sono in realtà quelli risultanti dalla composizione di 3 moti: il primo detto **Moto Proprio casuale o Peculiare** che mostra un andamento rettilineo uniforme sulla **Volta Celeste** e che è casuale per ogni **Stella** situata nelle vicinanze del nostro **Sole** sia come modulo che come direzione; il secondo moto è quello che

riflettono le **Stelle** a causa del moto del **Sole** (rettilineo uniforme) verso la direzione **dell'Apice Solare**; il terzo moto invece è quello che mostrano le **Stelle** a seconda della posizione di queste rispetto al centro galattico.

Per semplicità supponiamo che il moto delle **Stelle** dipenda soltanto dal loro moto casuale rispetto al **Sole** immaginato fisso nello spazio. Orbene se osservassimo una di queste **Stelle** dotate di forte **Moto Proprio Peculiare** nel corso degli anni si noterebbe uno spostamento della **Stella** sulla **Sfera Celeste** lungo un cerchio massimo, ad esempio da **S** a **T** come è possibile vedere dalla **Figura 70**



Pertanto se il percorso da **S** a **T** è avvenuto nell'intervallo di tempo $\Delta t = (t - t_0)$ allora il **Moto Proprio annuo della Stella** sarà dato semplicemente dalla relazione:

$$\mu''/yr = \frac{ST'}{\Delta t^{yr}}$$

Usualmente il **Moto Proprio** si calcola dalla differenza delle posizioni equatoriali assunte dalle **Stelle** nel corso degli anni diviso per il numero di anni trascorsi. Tuttavia quando si fanno misure di posizioni queste sono relative all'equinozio di osservazione che coincide con la stessa data di osservazione. Poiché il **Moto Proprio** deve essere riferito ad uno stesso equinozio occorre correggere le posizioni equatoriali delle **Stelle** "precessandole" tutte ad uno stesso equinozio. In altri termini se con α_0 e δ_0 indichiamo la posizione della **Stella** all'equinozio t_0 ed epoca t_0 e con α_t e δ_t la posizione della **Stella** all'equinozio t ed epoca t , occorre scegliere un equinozio di riferimento (ad es. t_0) e correggere le α_t e δ_t per l'effetto di Precessione dall'istante t a quello t_0 . In questa maniera le due osservazioni nei punti **S** e **T** sono riferite ad uno stesso equinozio, quello t_0 , ma alle epoche di osservazione t_0 e t .

Quindi una volta precessate le α_t e δ_t della posizione T all'equinozio t_0 tramite le formule viste in un capitolo precedente relativo alla **Precessione Generale**, si avranno le nuove coordinate α'_t e δ'_t che permettono il calcolo delle componenti del **Moto Proprio** in α e δ riferite sempre all'equinozio t_0 .

$$\mu_\alpha = \frac{(\alpha'_t - \alpha_0)}{(t - t_0)}$$

$$\mu_\delta = \frac{(\delta'_t - \delta_0)}{(t - t_0)}$$

Occorre ricordare che il **Moto Proprio** μ_α appena calcolato, in realtà è quello misurato lungo l'**Equatore Celeste** e non quello sul cerchio minore prossimo alla **Stella** per cui se si vuole avere il valore del **Moto Proprio totale trasversale** occorre dapprima portare il μ_α (dato in secondi di tempo all'anno) al cerchio minore mediante la trasformazione (vedi **Figura 70**):

$$\mu_\alpha^{''/yr} = \mu_\alpha^{s/yr} \cdot \cos(\delta_0) \cdot 15$$

avendo assunto che $\delta_t \approx \delta_0$.

Quindi supponendo che $(t - t_0)$ sia uguale ad 1 anno il triangolo UTS che si genera in **Figura 70** può considerarsi piano anziché sferico in quanto i **Moti Propri delle Stelle** ammontano al massimo a qualche secondo d'arco all'anno per cui il **Moto Proprio trasversale totale annuo della Stella** può calcolarsi semplicemente mediante il **Teorema di Pitagora**:

$$\mu_{tot}^{''/yr} = \sqrt{(\mu_\alpha^{''/yr})^2 + (\mu_\delta^{''/yr})^2}$$

A titolo di cronaca, la maggior parte dei **Moti Propri delle Stelle** è inferiore al secondo d'arco per anno, mentre la **Stella di Barnard**, la più veloce ad oggi conosciuta, ha un **Moto Proprio** annuo di **circa 10''**.

Ovviamente poiché il **Moto Proprio** è una quantità angolare, a parità di velocità lineare in Km/s una **Stella** vicina mostrerà un **Moto Proprio** trasversale più grande di una **Stella** più lontana.

Per un trattamento più rigoroso dell'utilizzo dei moti propri per il calcolo delle coordinate equatoriali delle stelle si consulti l'**Appendice E** in cui viene affrontato il problema da un punto di vista vettoriale e matriciale.

Velocità Spaziale delle Stelle

Il **Moto Proprio** appena studiato rappresenta solo la componente della velocità angolare della **Stella** proiettata sul piano tangente alla **Sfera Celeste** e passante per la **Stella** stessa. In realtà il moto spaziale totale delle **Stelle** può avvenire in qualunque direzione dello spazio per cui oltre ad esserci una componente trasversale (tangente alla **Sfera Celeste**) esiste anche una componente radiale.

Fortunatamente la spettroscopia ci permette di determinare la velocità radiale di una **Stella** osservando lo spostamento delle righe degli elementi chimici nello spettro di cui essa è composta, rispetto alla posizione delle righe degli stessi elementi chimici osservati in uno spettro realizzato in laboratorio. Lo spostamento delle righe, dovuto all'**Effetto Doppler**, modifica la lunghezza d'onda λ

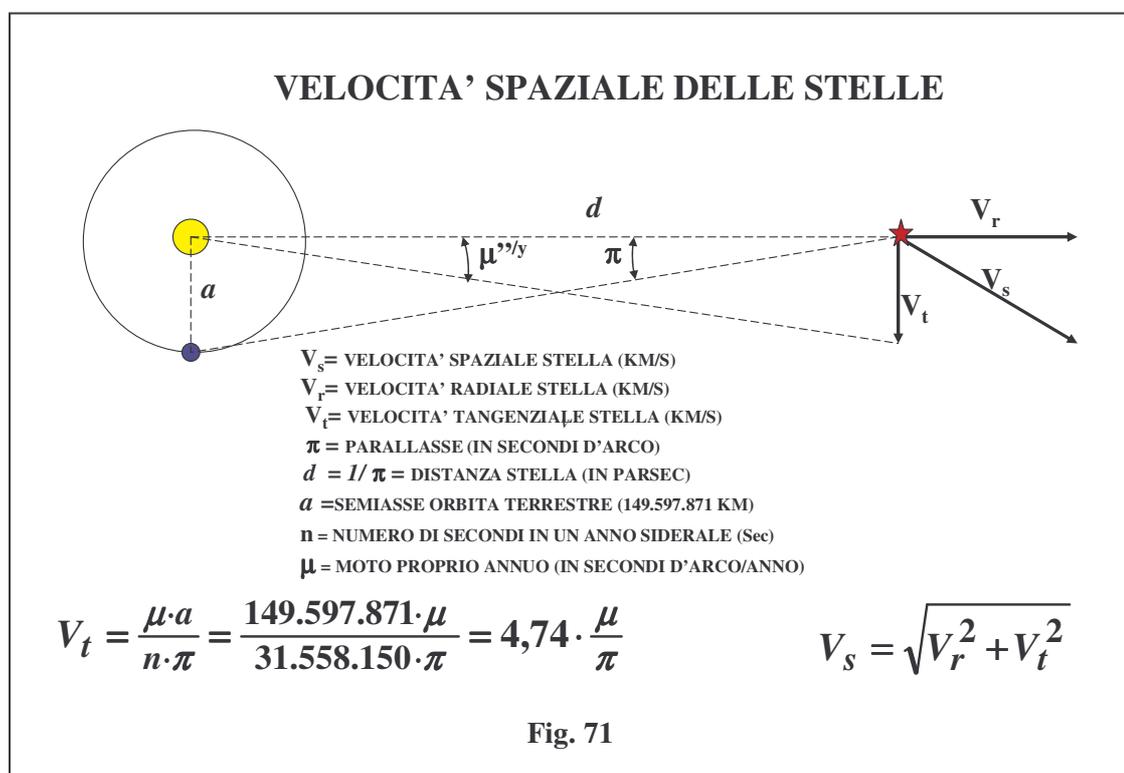
della riga osservata facendola diventare più lunga se la sorgente si allontana da noi o più corta se si avvicina secondo la relazione classica:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$$

dove con $\Delta\lambda$ si indica la variazione della lunghezza d'onda subita per effetto della velocità radiale della **Stella**, mentre v rappresenta la velocità di avvicinamento (negativa) o di allontanamento (positiva) da noi in Km/s e con c la velocità della luce.

Pertanto la velocità spaziale della **Stella** in Km/s è possibile calcolarla combinando vettorialmente le componenti trasversali e radiali dei moti osservati alla condizione di conoscere il **Moto Proprio** totale μ in arcsec/anno, la velocità radiale in Km/s e la distanza della **Stella** da noi in parsec (o la **Parallasse** π in secondi d'arco).

Per comprendere come si può effettuare la determinazione della velocità spaziale della **Stella** facciamo riferimento alla **Figura 71**.



Per calcolare la velocità spaziale occorre trasformare per prima cosa il Moto Proprio da secondi d'arco anno a Km/s. Pertanto la velocità tangenziale V_t in Km/sec è data dalla seguente relazione

$$V_{t(Km/sec)} = \mu''/sec \cdot \frac{d_{(Km)}}{206.265}$$

La distanza **Sole Stella** $d_{(Km)}$ è legata alla **Parallasse** π'' dalla seguente relazione:

$$d_{\text{Km}} = d_{\text{pc}} \cdot 206.265 \cdot a_{\text{Km}} = \frac{1}{\pi''} \cdot a_{\text{Km}} \cdot 206.265$$

dove $a_{(km)}$ é la distanza media Terra-Sole =149.597.871 Km, mentre μ''/sec é legata al **Moto Proprio annuo** dalla seguente relazione:

$$\mu''/sec = \frac{\mu''/yr}{n^{s/yr}} = \frac{\mu''/yr}{31.558.150}$$

dove $n^{s/yr}$ è il numero di secondi in un anno siderale (**31.558.150 secondi in 1 anno siderale**)

Sostituendo queste ultime due relazioni nella precedente $V_{t(Km/sec)}$ si ha:

$$V_{t(Km/s)} = \frac{\mu''/yr \cdot a_{\text{Km}} \cdot 206.265}{\pi'' \cdot n^{s/yr} \cdot 206.265} = \frac{\mu''/yr \cdot 149.597.871 \cdot 206.265}{\pi'' \cdot 31.558.150 \cdot 206.265} = 4,74 \cdot \frac{\mu''/yr}{\pi''} = 4,74 \cdot \mu''/yr \cdot d_{\text{pc}}$$

A questo punto la velocità spaziale totale della **Stella** $V_{s(Km/sec)}$ in Km/s sarà data dalla combinazione della velocità trasversale $V_{t(Km/sec)}$ e radiale $V_{r(Km/sec)}$ mediante il teorema di Pitagora

$$V_{s(Km/sec)} = (V_{t(Km/sec)}^2 + V_{r(Km/sec)}^2)^{1/2}$$

Moto Solare e Parallasse Secolare

Finora abbiamo considerato i moti delle **Stelle** come se questi dipendessero solo dal loro moto relativo rispetto ad un **Sole** supposto fisso nello spazio. In realtà sappiamo che anche il **Sole** si muove secondo una certa direzione dello spazio rispetto alle **Stelle** poste nelle sue immediate vicinanze. Per effetto di questo moto le **Stelle** che osserviamo contengono oltre il loro **Moto Proprio casuale** anche il moto riflesso del **Sole**. In altri termini se immaginassimo di osservare dal **Sole** delle **Stelle** praticamente prive di **Moti Propri casuali**, in tutte le direzioni, vedremmo che queste mostrerebbero dei moti riflessi inversamente proporzionali alle loro distanze e a parità di distanza i moti sarebbero tanto più elevati quanto più fossero perpendicolari alla direzione del moto spaziale del **Sole**.

Volendo calcolare lo spostamento angolare di una **Stella** dovuta solo al moto parallattico del **Sole** ci possiamo aiutare con la **Figura 72** in cui con S é indicata la posizione del **Sole** ad una certa epoca e con S' la posizione del medesimo dopo un anno. In questo lasso di tempo il **Sole** avrà percorso lo spazio $b = n U$ dove n è il numero di secondi in un anno siderale e U la velocità del **Sole** in Km/s verso l'**Apice**. Se la **Stella A** è vista da S l'angolo che assume con la direzione dell'apice sarà λ , mentre dopo un anno, quando S sarà in S' , l'angolo sarà λ' .

La differenza tra questi due angoli, da considerazioni di trigonometria piana, è proprio l'angolo p secondo cui dalla **Stella** si è osservato lo spostamento del **Sole** da S a S' :

$$p = \lambda' - \lambda$$

D'altra parte se con d si indica genericamente la distanza della **Stella** da S e con $b \sin \lambda$ l'altezza relativa del triangolo $S'SA$ tracciata da S' perpendicolarmente a SA , il valore di p si può calcolare immediatamente nel seguente modo:

$$p = \frac{b}{d} \cdot \sin(\lambda) \cdot \cos ec(1'')$$

ma d (in Km) è legato al semiasse dell'orbita terrestre a (in Km) e dalla Parallasse π'' della **Stella** dalla relazione:

$$d = \frac{a}{\pi} \cdot \cos ec(1'')$$

che sostituito nella relazione precedente dà:

$$p = \lambda' - \lambda = n \cdot U \cdot \sin(\lambda) \cdot \frac{\pi}{a}$$

Se con n indichiamo il numero di secondi in un anno (**31.558.150 secondi**) e con a la distanza media **Terra Sole (149.597.871 Km)** abbiamo il valore del moto parallattico del **Sole** e per riflesso della **Stella** in secondi d'arco

$$p'' = \lambda' - \lambda = \frac{U \cdot \pi \cdot \sin(\lambda)}{4,74}$$

nel caso in cui λ assuma il valore di 90° la formula si semplifica in:

$$p'' = H'' = \lambda' - \lambda = \frac{U \cdot \pi}{4,74}$$

in questo caso il valore di H viene chiamato **Parallasse Secolare** ed è l'angolo sotto cui si vede lo spostamento del **Sole** dalla **Stella** in un anno in modo tale che l'angolo in S tra **Stella** e Apice Solare sia 90° .

Tuttavia il moto parallattico avviene secondo un cerchio massimo che forma un angolo χ con il meridiano passante per il **Sole** in S e che dipende dalle coordinate equatoriali dell'Apice Solare A e D e dalle coordinate equatoriali α e δ della **Stella A** secondo le relazioni, che per questioni pratiche non dimostriamo :

$$\cos \lambda = \sin D \sin \delta + \cos D \cos \delta \cos(\alpha - A)$$

$$\sin \lambda \sin \chi = \cos D \sin(\alpha - A)$$

$$-\sin \lambda \cos \chi = \sin D \cos \delta - \cos D \sin \delta \cos(\alpha - A)$$

Da queste relazioni il moto parallattico nelle componenti equatoriali $p_\alpha p_\delta$ diventa:

$$p_{\alpha} = p \sec \delta \sin \chi = H \sin \lambda \sin \chi \sec \delta$$

$$p_{\delta} = p \cos \chi = H \sin \lambda \cos \chi$$

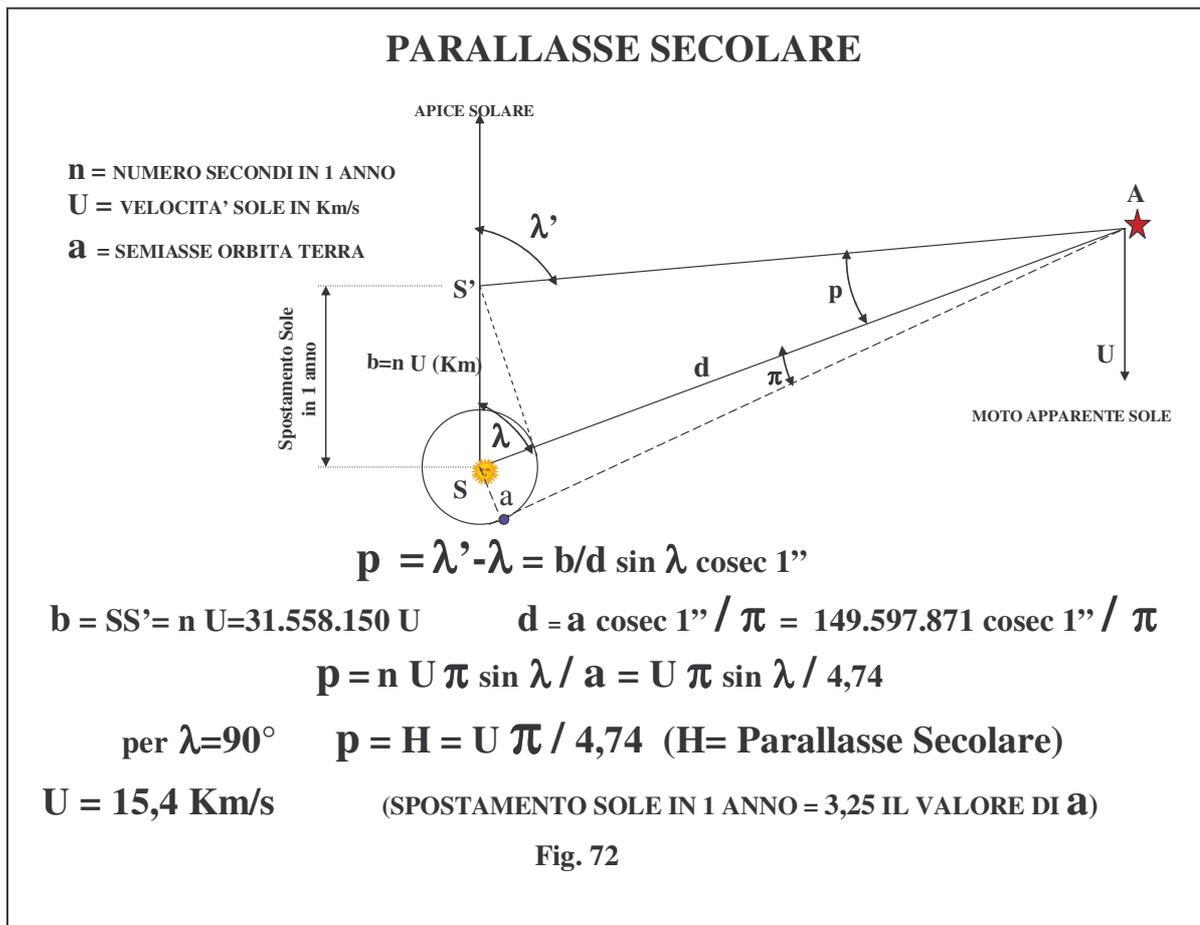
Assumendo di conoscere il valore della velocità del **Sole** verso l'Apice e supponendo che sia **U=19,5 Km/s** il valore della **Parallasse Secolare** diventa proporzionale alla **Parallasse Trigonometrica** secondo la relazione:

$$H = 4,11 \pi$$

Questa proporzionalità in altri termini sta a significare che lo spazio percorso dal **Sole** in un anno verso l'Apice è pari a 4,11 volte la distanza media **Terra-Sole**.

Recenti determinazioni mostrano che la velocità del **Sole** è compresa tra i **16 e i 23 Km/s** a seconda dei tipi spettrali delle **Stelle** considerate, nel senso che **Stelle** di tipo **A** mostrano velocità apparenti di **16 Km/s** mentre **Stelle** di tipo **M** velocità riflesse di circa **23 Km/s**.

Analogo discorso per quanto riguarda le coordinate galattiche dell'apice solare che variano da **l=47°,2 b=25°,5** per **Stelle** tipo **A0-A5** fino a **l=70°,0 b=17°,6** per **Stelle** tipo **M0-M5**



Parallassi Statistiche o Medie

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato il moto delle **Stelle** vicine al nostro **Sole** come se queste fossero fisse tra di loro mentre il **Sole** si muoveva tra di esse ad una data velocità verso una certa direzione dello spazio detta **Apice Solare**. Per effetto di questa velocità le **Stelle** mostrano un moto uguale e contrario a quello del **Sole**.

Purtroppo come si è accennato in precedenza le **Stelle** oltre a mostrare il moto riflesso del **Sole** hanno anche un **Moto Proprio Peculiare** che le fa andare in tutte le direzioni in maniera casuale.

Sfruttando proprio il principio secondo cui i **Moti Propri peculiari** delle **Stelle** sono distribuiti a caso è possibile risalire alla distanza di un certo numero di **Stelle** prospetticamente vicine e supposte tutte alla stessa distanza. Infatti scegliendo un certo numero N di **Stelle** prospetticamente vicine tra di loro con una certa luminosità apparente ed un certo colore (stesso tipo spettrale) si può ragionevolmente credere, con un certo margine di errore, che queste **Stelle** siano praticamente tutte alla stessa distanza.

Se facciamo inoltre l'assunzione che queste abbiano dei **Moti Propri Peculiari** distribuiti a caso possiamo affermare che (vedi vettori \mathbf{p} in verde di **Figura 73**):

$$\sum_{i=1,N} \vec{p}_i = \mathbf{0}$$

In altri termini la somma delle componenti proiettate sulla volta **Celeste** dei **Moti Propri Peculiari**, essendo per definizione distribuiti a caso, deve necessariamente essere uguale a zero.

Poiché quello che in realtà osserviamo di ogni **Stella** è l'insieme del Moto Solare riflesso più quello Proprio Peculiare potremmo scrivere la seguente relazione:

$$\sum_{i=1,n} \vec{v}_i = \sum_{i=1,N} \vec{p}_i + \sum_{i=1,N} \vec{q}_i$$

dove con $\sum_{i=1,N} \vec{q}_i$ abbiamo rappresentato la somma delle componenti della velocità angolare riflessa del **Sole** sul piano tangente alla **Sfera Celeste**, velocità che tra di loro sono uguali in quanto le **Stelle** sono tutte osservate alla stessa distanza e secondo un angolo che poco si discosta da λ .

Sulla base di quanto abbiamo detto la relazione precedente si può scrivere:

$$\sum_{i=1,n} \vec{v}_i = \sum_{i=1,N} \vec{q}_i$$

ma questa si può scrivere ricordando quanto abbiamo visto nel paragrafo precedente:

$$\sum_{i=1,N} v_i = \frac{\vec{U} \cdot \sin(\lambda)}{4,74} \cdot \sum_{i=1,N} \pi_i$$

Tuttavia, dato che abbiamo supposto le **Stelle** tutte all'incirca alla stessa distanza possiamo definire una **Parallasse Media** come :

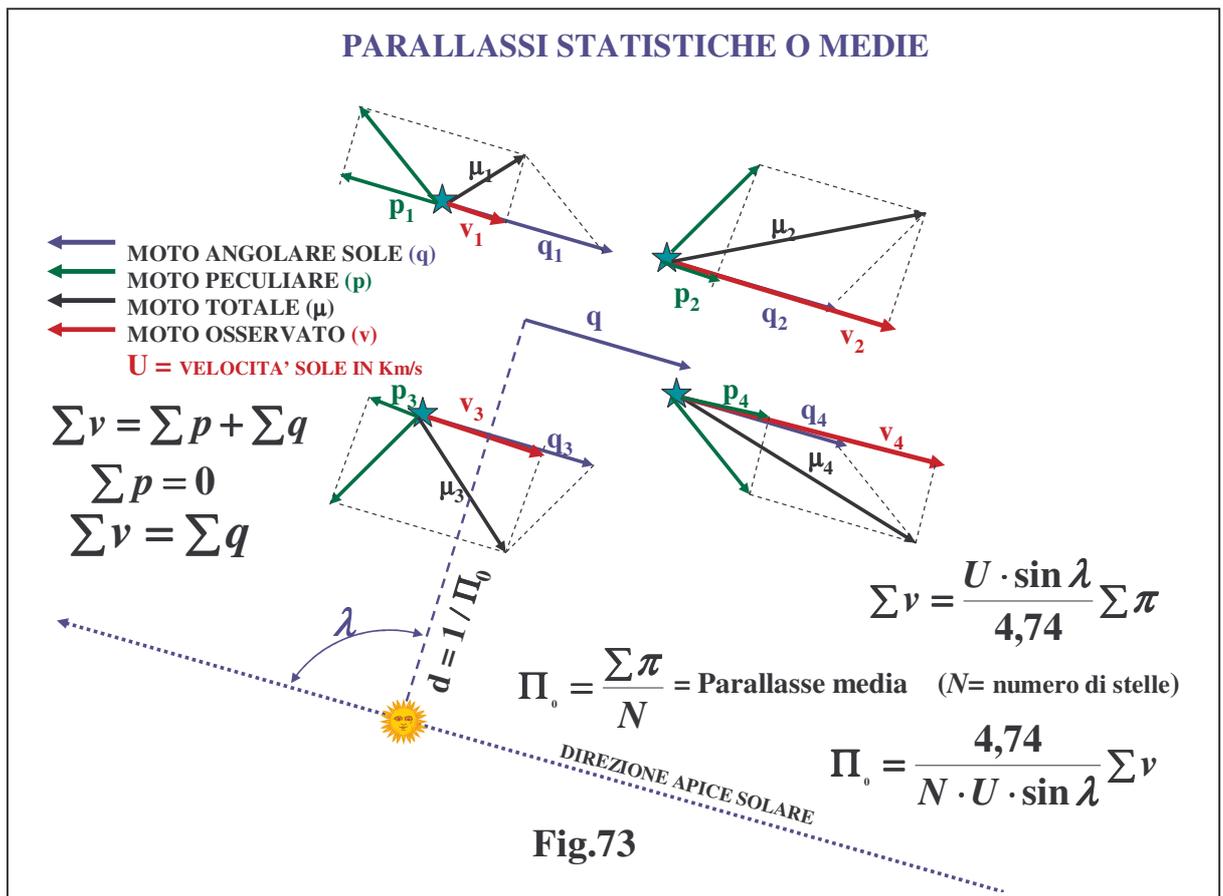
$$\Pi_0 = \frac{\sum \pi_{i=1,N}}{N}$$

quindi sostituendola e invertendola nella relazione precedente si ha:

$$\Pi_0 = \frac{4,74 \cdot \sum_{i=1,N} \vec{V}_i}{N \cdot \vec{U} \cdot \sin(\lambda)}$$

ma se di questa equazione si conosce il valore di U del moto solare si ricava direttamente la **Parallasse Media** e quindi la distanza media del gruppo di **Stelle** considerato. Questo tipo di parallassi così determinate vengono chiamate **Parallassi Medie o Statistiche**.

Ovviamente le relazioni fin qui riportate sono relative ad un gruppo di **Stelle** prospetticamente vicine tra di loro ma distribuite in una direzione qualsiasi dello spazio, per cui se si volessero ottenere le **Parallassi Medie** dai **Moti Propri** osservati nelle componenti α e δ occorrerebbe utilizzare delle trasformazioni analoghe a quelle viste per la **Parallasse Secolare**, che qui non riportiamo.



Stelle Doppie Visuali

Se osserviamo il cielo in una notte serena notiamo che tra le tante **Stelle** visibili ad occhio nudo ce ne sono alcune prospetticamente vicine ad altre. Questo fatto fu registrato già ai tempi di Tolomeo (200 d.C.) che attribuì a questi oggetti il nome di **Stelle Doppie**. Nei secoli successivi si registrarono altre coppie di **Stelle** angolarmente vicine tra di loro ma solo nel 1650 con Padre Riccioli le cose cambiarono radicalmente con l'utilizzo dei primi cannocchiali. Con questi strumenti si scoprirono una infinità di coppie non visibili ad occhio nudo. Tuttavia si dovette attendere più di un secolo per avere la conferma che molte di queste coppie non erano soltanto un curioso fenomeno prospettico. Infatti nel 1767 **Mitchel** analizzando il moto relativo di un certo numero di **Stelle Doppie** osservate per un lungo periodo di tempo si accorse che alcune di queste non si spostavano tra di loro di moto angolare rettilineo uniforme come ci si aspetterebbe da due oggetti che vagano indisturbati nello spazio, bensì si spostavano relativamente tra di loro (ad esempio la **Stella** più debole rispetto alla più brillante) su di una traiettoria curvilinea. Ciò fece nascere il sospetto che alcune doppie angolarmente vicine dovevano essere realmente vicine tra di loro, non solo prospetticamente, al punto da essere legate gravitazionalmente.

Si erano così scoperte le **Binarie Visuali**, cioè sistemi costituiti da due **Stelle** che ruotano una attorno all'altra, o meglio, che girano entrambe attorno al loro comune centro di gravità. Da quel giorno le osservazioni sui sistemi doppi si intensificarono utilizzando tecniche via via sempre più sofisticate.

Lo scopo finale di questa ricerca era ed è tuttora quello di mettere in evidenza i moti orbitali di questi sistemi con i quali è possibile calcolare la massa delle **Stelle** in modo assoluto a patto che di queste se ne sia calcolata con una certa accuratezza la distanza (**Parallasse Trigonometrica**).

Al giorno d'oggi sono state osservate circa **100.000 Stelle Doppie Visuali** con tecniche e strumenti diversi sparsi in tutto il mondo raccolte globalmente in **circa 1 milione di osservazioni singole** (una doppia in genere viene osservata parecchie volte). Le separazioni angolari mostrate da queste doppie vanno da qualche millesimo di secondo d'arco fino a qualche centinaio di secondi d'arco.

Ovviamente i sistemi legati gravitazionalmente mostreranno dei moti orbitali relativi via via più corti man mano che la separazione angolare tra le due componenti decresce.

Infatti, ricordando la terza legge di Keplero generalizzata (nel sistema di misura MKS) abbiamo che:

$$\frac{a^3}{P^2} = G \cdot \frac{M_A + M_B}{4 \cdot \pi^2}$$

in cui si vede che mantenendo costanti le masse M_A e M_B delle due **Stelle**, all'aumentare del semiasse maggiore a dell'orbita (confondibile in alcuni casi con la separazione angolare media tra le due **Stelle**) aumenta, anche se non proporzionalmente, il periodo P , cioè il tempo impiegato da una componente a fare un giro completo di 360° intorno alla componente più brillante.

Per osservare le **Binarie Visuali** occorre che queste abbiano delle separazioni angolari superiori al potere risolutivo dei telescopi, con periodi che generalmente vanno da frazioni di anno per le binarie più strette, con separazioni dell'ordine di qualche millesimo o centesimo di secondo d'arco, a qualche centinaia di anni per separazioni intorno al secondo d'arco, fino a migliaia di anni per separazioni di decine di secondi d'arco. Ovviamente per separazioni molto grandi in cui si stimano periodi di migliaia di anni non si può avere la certezza che il sistema osservato sia effettivamente fisico, cioè

gravitazionalmente legato, in quanto l'arco di orbita è troppo piccolo per poterlo vedere curvilineo. Ad oggi si stima che circa il 70% degli oggetti singoli che vediamo in cielo siano in realtà sistemi doppi legati. Tuttavia la determinazione degli elementi orbitali di tali coppie è confinata a solo un migliaio di coppie con periodi in genere non superiori ai 200 anni.. Infatti stime di periodi superiori diventano molto incerte proprio perché dall'inizio delle osservazioni (circa 2 secoli fa) non si è raccolto materiale sufficiente a coprire una cospicua parte dell'orbita .

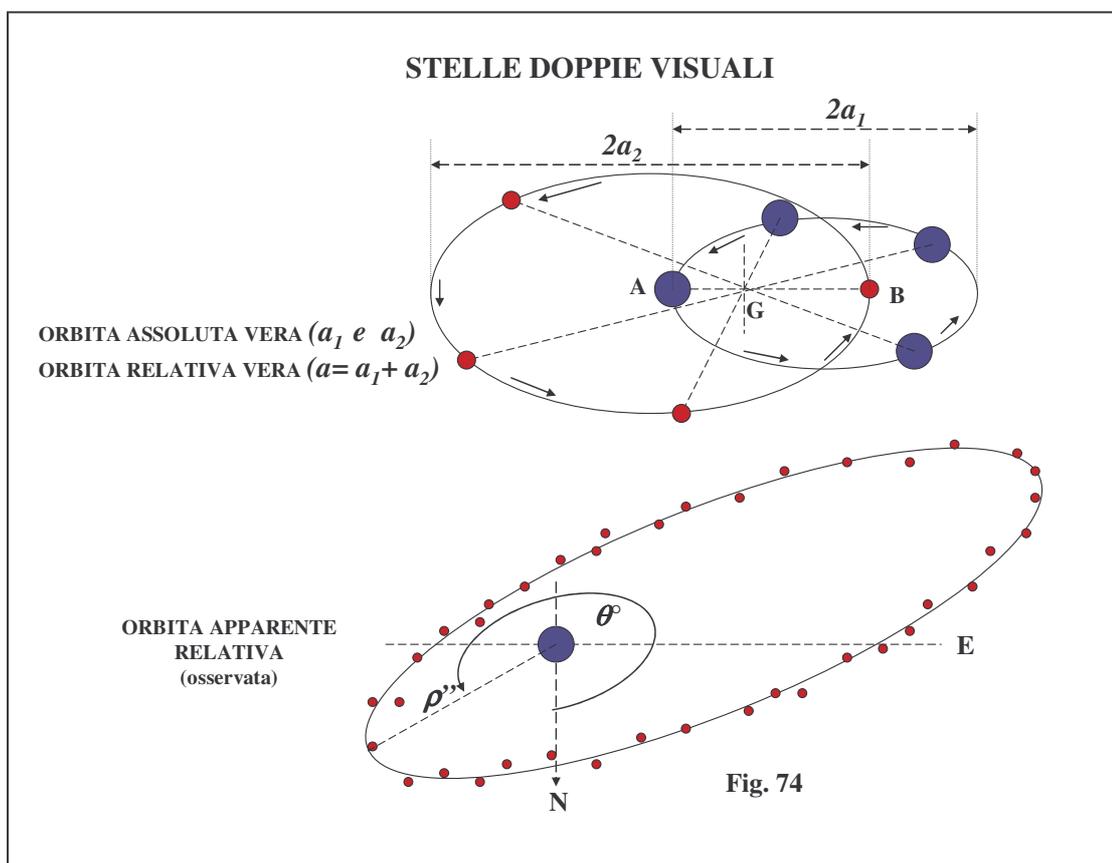
Abbiamo detto che valutando la separazione angolare e la posizione in cielo rispetto al **Nord Celeste** di una componente di un sistema doppio rispetto alla componente più brillante per un certo numero di anni è possibile ricostruire un tratto dell'orbita apparente che descrive la coppia di **Stelle** sul piano tangente alla **Sfera Celeste**.

In effetti il moto relativo di una **Stella** rispetto all'altra, che viene osservato da **Terra**, in realtà è la proiezione del moto orbitale vero sul piano tangente alla **Sfera Celeste**.

Difficilmente capita di osservare sistemi binari in cui il loro piano orbitale vero sia proprio tangente alla **Sfera Celeste**. Di solito il piano dell'orbita vera è inclinato secondo un angolo i rispetto al piano tangente alla **Sfera Celeste** su cui si proietta l'orbita .

Ammettiamo per un momento di avere una binaria visuale con il piano orbitale vero tangente alla sfera **Celeste** ($i = 0^\circ$) . Se noi osservassimo il moto delle due componenti rispetto ad uno scenario di **Stelle** supposte fisse vedremmo che ciascuna componente ruoterebbe su di un'orbita ellittica intorno ad un comune centro di gravità (vedi immagine in alto della **Figura 74**) Le due ellissi che si verrebbero a formare avrebbero l'orientamento dei loro assi coincidente e così dicasi delle loro eccentricità che risulterebbero uguali.

In questa maniera avremmo modo di osservare due moti orbitali relativi alle due componenti di semiassi maggiori a_1 e a_2 . Nella pratica osservativa quello che in realtà si osserva è la posizione della **Stella** più debole rispetto a quella brillante che descrive un'orbita ellittica. Nel caso di $i = 0^\circ$ il semiasse dell'orbita relativa sarà dato da (vedi **Figura 74**) :



$$a = a_1 + a_2.$$

e l'orbita relativa avrà la stessa eccentricità delle due orbite ellittiche assolute i cui fuochi coincidono con il baricentro del sistema.

Pertanto gli elementi che si misurano durante un'osservazione di una binaria visuale sono la separazione angolare ρ tra le due componenti in secondi d'arco e l'angolo di posizione θ rispetto al **Nord Celeste** contato in gradi positivamente verso **Est**. Raccogliendo molte osservazioni di questo tipo nel corso degli anni si ottengono tante posizioni che graficate si dispongono approssimativamente su di un'orbita ellittica (orbita apparente di **Figura 74**). Tramite metodi analitici che non riportiamo in questo contesto si può arrivare alla determinazione dei parametri dell'ellisse apparente che opportunamente analizzata permette di arrivare agli elementi orbitali dell'orbita vera che sono:

P: **Periodo orbitale in anni**

T: **Tempo del passaggio al Periastro in anni**

e: **Eccentricità orbita vera**

i: **Inclinazione dell'orbita vera rispetto al piano tangente alla sfera**

a: **Semiassse Maggiore orbita vera in secondi d'arco**

α : **Argomento del Periastro (angolo tra il nodo ascendente dell'orbita e il Periastro)**

Ω : **Longitudine Nodo Ascendente contato dal Punto Gamma al nodo in gradi**

Le tecniche osservative finora utilizzate possono sintetizzarsi come segue:

- **Tecnica Visuale Micrometrica** : viene utilizzata adattando un micrometro filare al fuoco del telescopio. Il micrometro è costituito da un cerchio graduato esterno che permette la determinazione dell'orientamento della congiungente la coppia di **Stelle** rispetto al Nord **Celeste** tramite la sovrapposizione di un filo del micrometro stesso lungo le due **Stelle**. Eseguita questa operazione, tramite lo spostamento di un filo perpendicolare al precedente si registra la separazione angolare della coppia sulla base del numero di giri che occorre dare a una vite micrometrica che sposta il filo lungo le due componenti da una **Stella** all'altra. Questa tecnica visuale viene utilizzata in genere per sistemi doppi relativamente brillanti, con poca differenza di magnitudine tra le componenti e con separazioni angolari che vanno da qualche frazione di secondo d'arco a circa due secondi d'arco.
- **Tecnica Fotografica**: impiega l'utilizzo di lastre fotografiche al fuoco del telescopio. Questo recettore è molto più sensibile dell'occhio in quanto integra nel tempo la radiazione proveniente dalle **Stelle** per cui è adatto per oggetti più deboli di quelli osservabili con la tecnica visuale micrometrica. Per contro l'intervallo delle separazioni dei sistemi doppi va da circa 2 secondi d'arco ad alcune decine di secondi d'arco. Il fatto che il limite inferiore delle separazioni sia più grande di quello micrometrico dipende dalle dimensioni delle immagini stellari che nelle lastre fotografiche tendono a dilatarsi per saturazione dell'emulsione e quindi a fondersi con le immagini stellari adiacenti.
- **Tecnica CCD**: impiega un CCD (paragonabile ad una lastra elettronica) che memorizza su migliaia di pixels (unità fotometriche micrometriche) la radiazione luminosa proveniente dalle **Stelle** distribuendola su di un'area quadrata o rettangolare. Questa tecnica permette di osservare oggetti molto più deboli di quelli osservabili con la tecnica fotografica e di raggiungere separazioni inferiori in alcuni casi al secondo d'arco. Per contro il CCD ha un campo piuttosto ristretto che si aggira in genere sulla decina di primi d'arco, mentre la lastra fotografica può coprire dei campi stellari di parecchi gradi. Comunque sia questa è la tecnica maggiormente impiegata al giorno d'oggi per l'osservazione delle **Stelle Doppie Visuali Larghe**.

- Esistono inoltre altre tecniche come: la **Tecnica Interferometrica**, la **Speckle Interferometry** e **quella delle Occultazioni Lunari** che lavorano su separazioni dell'ordine del centesimo di secondo d'arco, ma solo su oggetti brillanti.

Parallasse Dinamica

Proprio lo studio dei **Sistemi Binari Visuali** ci fornisce un potente mezzo per determinare, in maniera indipendente da qualsiasi modello, la massa delle **Stelle** appartenenti ad un sistema doppio gravitazionalmente legato. Infatti se di una **Binaria Visuale** si è riusciti a determinarne l'orbita o più precisamente i suoi **Elementi Orbitali**, nonché la sua **Parallasse Trigonometrica**, grazie alla **terza legge di Keplero generalizzata** siamo in grado di calcolare la somma delle **Masse** delle componenti il **Sistema Binario**.

Pertanto se per un **Sistema Binario** vale la seguente legge:

$$\frac{a_m^3}{P_m^2} = G \cdot \frac{M_A + M_B}{4 \cdot \pi^2}$$

dove a_m è il Semiasse Maggiore dell'orbita e P_m il Periodo del sistema, rispettivamente in metri e in secondi di tempo, mentre G è la costante di gravitazione Universale in Newton m^2/kg^2 , M_A e M_B la massa delle due **Stelle** in Kg e π il valore del pi greco =3,14..(da non confondere con la **Parallasse Trigonometrica**!), avendo a disposizione gli elementi orbitali e la **Parallasse** saremmo in grado di ottenere la somma delle due masse stellari in Kg.

Tuttavia con questa formula dovremmo assumere noto con certezza il valore della costante Gravitazionale G .

In realtà possiamo semplificare questa formula eliminando il valore di G

Consideriamo dapprima la formula analoga ma valida per il sistema **Terra -Sole**, che si scriverà (vedi **Figura 75**):

PARALLASSE DINAMICA

ELEMENTI NOTI
 $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{Kg}^2$
 a'' : semiasse maggiore orbita (in arcseconds)
 P_S : Periodo orbitale in anni
 π : parallasse trigonometrica stella doppia (in arcseconds)
 M_A e M_B = Massa stella primaria e compagna (in masse solari)
 $a(\text{u.a.}) = a'' / \Pi''$

Dalla III legge di Keplero generalizzata si ha :

Per la stella doppia	$\frac{a_m^3}{P_m^2} = \frac{G}{4 \cdot \pi^2} \cdot (M_a + M_b)$	$\left\{ \begin{array}{l} a_m: \text{ semiasse stella doppia in metri} \\ P_m: \text{ periodo orbitale in secondi} \\ (M_a + M_b): \text{ somma masse in Kg} \end{array} \right.$
Per il sistema Terra-Sole	$\frac{a_s^3}{P_s^2} = \frac{G}{4 \cdot \pi^2} \cdot (M_s + M_T)$	$\left\{ \begin{array}{l} a_s: \text{ semiasse Sole -Terra in metri} \\ P_s: \text{ periodo orbitale in secondi} \\ (M_s + M_T): \text{ somma masse in Kg} \end{array} \right.$

dividendo ambo i membri delle 2 relazioni precedenti si ottiene:

a : in unità astronomiche
 P : in anni siderali
 M_A e M_B : in masse solari

$\frac{a_{u.a.}^3}{P_{years}^2} = (M_A + M_B)$	o in altra forma	$(M_A + M_B) = \frac{a''^3}{P_{years}^2 \cdot \Pi''^3}$
--	------------------	---

Fig. 75

$$\frac{a_s^3}{P_s^2} = G \cdot \frac{M_S + M_T}{4 \cdot \pi^2}$$

dove a_s è il Semiasse Maggiore dell'orbita terrestre e P_s il Periodo orbitale del sistema **Terra-Sole**, rispettivamente in metri e in secondi di tempo, G la costante di gravitazione Universale in Newton m^2/kg^2 , e M_S e M_T le masse del **Sole** e della **Terra** in Kg.

Se prendiamo le due equazioni precedenti e le dividiamo membro a membro facendo inoltre l'assunzione che $M_S + M_T \cong M_S$ otteniamo:

$$\frac{a_{U.A.}^3}{P_{A.S.}^2} = (M_{oA} + M_{oB})$$

In questa maniera il semiasse maggiore della binaria sarà espresso in Unità Astronomiche (U.A.) mentre il Periodo ($P_{A.S.}$) in Anni Siderali terrestri e la Massa delle due componenti ($M_{oA} + M_{oB}$) in unità di masse solari.

Dato che quello che si determina è il semiasse maggiore dell'orbita a in secondi d'arco e dato che esiste la relazione tra **U.A.** e **Parallasse Trigonometrica Π''** si ha inoltre che:

$$a_{U.A.} = \frac{a''}{\Pi''}$$

pertanto la formula precedente diventa:

$$\frac{a''^3}{P_{A.S.}^2 \cdot \Pi''^3} = M_{oA} + M_{oB}$$

Quindi se si conosce molto bene la **Parallasse Trigonometrica** del sistema si riesce a calcolare anche bene la somma delle due masse stellari.

Viceversa se assumiamo che la massa delle **Stelle** sia paragonabile a quella solare cioè ($M_{oA} + M_{oB}$) = **2 masse solari**, allora si può ricavare il valore della **Parallasse** che si chiamerà in questo caso **Parallasse Dinamica** proprio perché è calcolata con gli elementi orbitali dinamici della coppia:

$$\Pi'' = \frac{a''}{(M_{oA} + M_{oB})^{1/3} \cdot P_{A.S.}^{2/3}} = \frac{a''}{2^{1/3} \cdot P_{A.S.}^{2/3}}$$

Fare l'assunzione che la massa delle singole componenti sia uguale a quella solare non porta ad un grande errore nella determinazione della **Parallasse Dinamica** sia perché in genere le masse delle **Stelle** mediamente sono dell'ordine di quella solare e sia perché un errore sulla massa si ripercuote

solo marginalmente sulla **Parallasse** del sistema , come si può vedere propagando gli errori delle variabili a'' , $M_{Tot} = M_A + M_B$, $P_{A.S.}$ sulla variabile Π'' secondo la nota formula della propagazione degli errori:

$$\sigma_{\Pi} = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 \cdot \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial P_{A.S.}} \right)^2 \cdot \sigma_{P_{A.S.}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial M_{Tot}} \right)^2 \cdot \sigma_{M_{Tot}}^2 \right]}$$

dopo aver derivato rispetto alle variabili a'' , M_{Tot} , $P_{A.S.}$ ed eseguito alcune semplificazioni si arriva alla seguente relazione:

$$\frac{\sigma_{\Pi}}{\Pi} = \sqrt{\left[\left(\frac{1}{a} \right)^2 \cdot \sigma_a^2 + \left(-\frac{2}{3 \cdot P_{A.S.}} \right)^2 \cdot \sigma_{P_{A.S.}}^2 + \left(-\frac{1}{3 \cdot M_{Tot}} \right)^2 \cdot \sigma_{M_{Tot}}^2 \right]}$$

in cui si nota che l'errore relativo nella **Parallasse** dipende solo per il 33% dall'errore relativo della massa totale del sistema.

Tuttavia la determinazione della **Parallasse Dinamica** ha più valore storico che pratico, in quanto la suddetta formula viene utilizzata in maniera inversa, cioè proprio per la determinazione delle masse stellari che al giorno d'oggi, paradossalmente, se ne conoscono con una certa attendibilità, grazie a questo metodo, solo poche decine.

Comunque sia dalla formula della **Parallasse Dinamica** è possibile calcolare solo la somma delle masse delle due **Stelle** una volta conosciuta con una certa precisione la distanza del sistema da noi. Per la valutazione delle singole masse occorrerà valutare anche la posizione del baricentro del sistema rispetto ad uno scenario di **Stelle** fisse. Per questo problema si rimanda la lettura **dell'Appendice E**

Cenni sulle Binarie Spettroscopiche ad Eclisse ed Astrometriche

Binarie Spettroscopiche

Una Binaria Spettroscopica è una stella doppia costituita da due componenti tanto vicine fra di loro da non poter essere risolte nelle singole stelle neanche utilizzando i più potenti telescopi ad oggi a disposizione. La duplicità del sistema è possibile dedurla analizzando spettroscopicamente la luce proveniente dalla coppia . Infatti, poiché le componenti del sistema doppio ruotano attorno al loro comune baricentro, succede che se il piano orbitale ha un'inclinazione accentuata rispetto al piano tangente la **Sfera Celeste**, una componente si avvicinerà a noi mentre l'altra si allontanerà e le velocità relative saranno tanto più elevate quanto più sono vicine tra di loro . Osservando lo spettro di queste due componenti si noterà lo spostamento delle righe spettrali (aumento o diminuzione della lunghezza d'onda della riga rispetto a quella che avrebbe a riposo in laboratorio) di una (se la stella secondaria è molto debole) o entrambe le componenti dovuto all'**Effetto Doppler**. Questo spostamento è tanto più marcato quanto più elevata è la velocità di recessione o avvicinamento della componente. Se si graficano nel tempo questi spostamenti, che si traducono in variazioni delle

velocità relative (in Km/s) delle componenti rispetto a noi, si vedrà che nell'arco di un periodo orbitale le velocità si dispongono su di una curva sinusoidale con un massimo positivo quando la componente si allontana radicalmente da noi lungo la linea di vista e un massimo negativo quando si avvicina lungo la suddetta linea, mentre sono nulle quando la componente si muove perpendicolarmente a questa linea. La linea di simmetria della sinusoide così tracciata ci dice a quale velocità si muove il sistema rispetto a noi, o in altri termini, supponendo fisso il moto del sistema rispetto alle stelle circostanti, la linea di simmetria ci dice di quanto si muove il sistema **Terra-Sole** nello spazio

Dall'analisi dell'andamento della curva sinusoidale delle velocità relative è possibile risalire agli elementi orbitali della **Binaria Spettroscopica** con una procedura analoga a quella adottata per i sistemi **Binari Visuali**, salvo il fatto che non è possibile discriminare il valore del semiasse maggiore a dall'inclinazione dell'orbita i , in quanto la procedura di riduzione dati fornisce solo il prodotto ($a \sin i$). Se si riescono a osservare le velocità radiali delle singole componenti si ha la possibilità di ottenere due curve di velocità e da queste ricavare in maniera indipendente gli elementi orbitali da ciascuna componente. I periodi di questi sistemi vanno generalmente da pochi giorni fino a qualche migliaio di giorni.

Binarie ad Eclisse

Le Binarie ad Eclisse sono un particolare caso di **Binarie Spettroscopiche**, in quanto il piano orbitale del sistema ha un'inclinazione rispetto al piano tangente alla sfera celeste molto prossimo ai 90° . In questa situazione una componente nel suo moto orbitale si interpone davanti all'altra eclissandola per poi a sua volta essere eclissata mezzo periodo dopo. In particolare si può avere addirittura un'eclisse totale della stella più piccola ad opera della più grande. In questo caso si parla di occultazione. Mezzo periodo più tardi si ha un'eclisse anulare della stella più grande ad opera della più piccola che viene chiamato transito. Da **Terra** si può osservare questo fenomeno con un fotometro che analizza globalmente la luce proveniente da entrambe le stelle e che per loro natura non sono risolvibili nelle singole componenti in quanto troppo vicine. Tuttavia il fotometro è in grado di registrare la variazione di luminosità prodotta da due oggetti che alternativamente si eclissano. In particolare se le due stelle sono sufficientemente separate ma non risolvibili il fotometro registrerà un massimo di luminosità quando le due componenti sono appaiate mentre registrerà un minimo di luce quando una stella si interpone davanti all'altra. Si avranno in realtà due minimi in quanto difficilmente la brillantezza delle due stelle è esattamente uguale. Infatti se la brillantezza della stella occultata è maggiore di quella che occultata il minimo di luce sarà più profondo mentre lo sarà di meno quando la stella con maggiore brillantezza passerà davanti all'altra stella.

A seconda della loro distanza mutua questi sistemi binari "stretti" vengono classificati come:

- **Sistemi Binari Staccati**, cioè quando le loro componenti sono sufficientemente separate da non influenzarsi vicendevolmente. In tal caso il sistema non presenterà variazioni luminose salvo quelle dovute all'eclisse delle due componenti. Se l'eclisse è anulare al fondo del minimo si ha una breve fase di luminosità costante. Una binaria di questo tipo è **Algol**, (β **Persei**) in cui entrambi i membri della binaria hanno forma sferica. Si distingue in questa variabile ad eclisse un minimo principale ed un minimo secondario molto piccolo (quasi impercettibile). Il periodo di questi oggetti è compreso in un intervallo molto ampio, generalmente da 2 a 3 giorni o da 5 a 8 giorni.
- **Sistemi Binari Semi-Staccati**, cioè quando una delle due componenti riempie il **Lobo di Roche**. Ricordiamo che i **Lobi di Roche** rappresentano le superfici equipotenziali che

avvolgono le due stelle. Vicino alle due stelle, le superfici equipotenziali sono approssimativamente sferiche e concentriche alla stella. Lontano dal sistema binario, sono approssimativamente ellissoidali ed elongate parallelamente all'asse che unisce le stelle. La superficie equipotenziale critica che incrocia se stessa al centro di massa del sistema (punto a velocità zero) definisce i due **Lobi di Roche**. Pertanto se una stella ha riempito il **Lobo** la curva di luce che si osserva incomincia ad essere alterata per via dei fenomeni di interazione esistenti tra una stella e l'altra. Una binaria di questo tipo è **β Lyrae**, in cui le due componenti, di dimensioni differenti, sono così vicine da assumere una forma ellissoidale (a causa delle sollecitazioni mareali), e possono trovarsi quasi a contatto. Il Periodo di queste binarie è superiore a un giorno con variazioni di luminosità continue con alternanza di minimi poco profondi.

- **Sistemi a Contatto**, cioè quando ambedue le componenti riempiono il loro **Lobo di Roche**. In tal caso la curva di luce mostra una variazione continua di luminosità poiché le due stelle sono ovalizzate (**effetto di ellissoidicità**) con gli assi maggiori diretti lungo la congiungente i centri stelle. Di conseguenza l'area proiettata delle due componenti sul piano tangente alla sfera celeste varia continuamente per motivi prospettici anche quando le due componenti non sono in eclisse: queste binarie sono del tipo ***W Ursae Majoris***, i cui componenti sono di forma ellissoidale ma di uguali dimensioni (nane) praticamente a contatto. Il Periodo di queste binarie è inferiore a un giorno.

Quando le due stelle sono vicine esiste anche il cosiddetto **effetto di riflessione** per cui ogni stella specialmente quella a temperatura più bassa è luminosa anche per la radiazione che riceve e riemette da parte della compagna.

Si ricorda inoltre che i dischi dei due astri non sono uniformemente luminosi in quanto i loro bordi presentano il **fenomeno dell'oscuramento al bordo** dovuto all'assorbimento prodotto dagli strati più esterni dell'atmosfera stellare.

L'analisi di una curva di luce di un sistema staccato permette di trovare i raggi dei due astri in unità della distanza tra di essi (ammettendo un'orbita circolare), il rapporto tra gli splendori superficiali e la inclinazione dell'orbita rispetto al piano tangente alla sfera celeste, oltre al valore dell'eccentricità e e dell'argomento del periastro ω , ammesso che in questo caso l'orbita sia ellittica.

Circa il 90% delle variabili ad eclisse ha periodi inferiori ai 10 giorni, quantunque esistano stelle con periodi eccezionalmente lunghi (pensiamo ai 9.883 giorni della ϵ Aurigae). Invece alcune stelle hanno periodi inferiori a 0,2 giorni. Il periodo più breve pari a 79 minuti è quello di SX Phoenicis.

Binarie Astrometriche

Le **Binarie Astrometriche** sono sostanzialmente delle **Binarie Visuali** che per effetto della loro grande distanza da noi, correlata alla separazione effettiva tra le loro componenti, sono tali da non essere risolte singolarmente anche utilizzando telescopi molto potenti. La loro natura doppia ci viene mostrata dallo spostamento del fotocentro del sistema (la luce è come se provenisse da una sola stella) rispetto ad uno scenario di stelle lontane supposte fisse. In altri termini il baricentro del sistema doppio si muove di moto rettilineo uniforme rispetto alle stelle di sfondo (assumendo che questo sistema sia lontano e quindi non mostri uno spostamento parallattico) mentre il fotocentro generalmente spostato rispetto al baricentro (salvo nel caso in cui le due stelle hanno uguale massa e luminosità) descrive un'ellisse intorno a questo. In questo caso l'analisi del moto del fotocentro rispetto alla posizione delle stelle di sfondo permette di risalire agli elementi orbitali del sistema astrometrico.

La prima scoperta di una binaria astrometrica venne fatta da **Bessel** nel 1844. Osservando **Sirio**, **Bessel** notò che il moto della **Stella** nel corso degli anni non era rettilineo, come ci si doveva aspettare da un oggetto singolo, ma aveva delle inflessioni sinusoidali con un periodo stimato di circa **50 anni**. Da queste osservazioni dedusse che **Sirio** doveva avere una compagna oscura. Solo nel 1862 **A.G. Clark** con un telescopio rifrattore da 46 cm riuscì a intravedere un debolissimo puntino luminoso attorno alla stella principale (10.000 volte meno luminoso), che confermò le osservazioni fatte in precedenza da **Bessel**. A questa compagna non più “oscura” venne dato il nome di **Sirio B**. Dalle osservazioni di **Clark** si riuscì a stimare la separazione tra le due componenti, paragonabile alla distanza esistente tra **Urano** e il **Sole**. Fu pure possibile ricostruire le due orbite assolute e ricavarne il valore delle masse. Da questi studi risultò che **Sirio A** ha una massa pari a **2,5** volte quella solare, mentre **Sirio B** pur avendo una massa simile a quella solare è cinquecento volte meno luminoso del **Sole**. Integrando questi risultati con altri ottenuti da studi spettroscopici si arrivò alla conclusione che la massa di **Sirio B** era confinata in un globo delle dimensioni planetarie e di conseguenza doveva avere una densità elevatissima se paragonata alla densità delle convenzionali stelle. A questo particolare oggetto di aspetto stellare ma con una densità inusuale per una stella venne dato il nome di **Stella Nana Bianca**

Struttura e Cinematica della nostra Galassia

Sguardo Storico

Come è noto il **Sole** fa parte di un insieme cospicuo di **Stelle** che va sotto il nome di **Via Lattea**. La ragione per cui venne dato questo nome dagli antichi risiede nel fatto che osservando il cielo in una notte serena si ha la possibilità di scorgere ad occhio nudo una debole fascia lattiginosa che solca il cielo stellato, come è possibile vedere nella foto di una porzione cielo riportata in **Figura 76**.

La Via Lattea vista da Terra



Fig. 76

Gli antichi greci credevano che questa fascia luminosa fosse generata dal latte sgorgato dalla mammella della Dea Giunone mentre allattava Ercole e che questo latte avesse permeato una certa porzione del cielo.

Solo con l'avvento del cannocchiale, agli inizi del 1600, **Galileo** scoprì che questa debole fascia luminosa era costituita da una miriade di **Stelle** molto deboli e tanto vicine tra di loro da non poter essere percepite singolarmente ad occhio nudo. La convinzione che il nostro **Sole** appartenesse a questo gruppo di **Stelle** fu rafforzata dal fatto che altre macchioline lattiginose presenti in altre regioni del cielo erano state osservate e risolte dallo stesso **Galileo** con il suo cannocchiale in tante stelline. Prendeva così corpo la prima formulazione scientifica del concetto di **Galassia**, intesa come enorme

raggruppamento di **Stelle**, di cui l'universo ne contiene un cospicuo numero. Tuttavia, bisogna aspettare il **1750** per avere la formulazione di un primo modello galattico. In quel periodo **Thomas Wright** suppose che la nostra **Galassia** fosse una struttura sferica schiacciata al cui interno doveva trovarsi il **Sole**. Più avanti **Kant e Lambert** perfezionarono il modello assumendo che la **Via Lattea** dovesse essere un disco schiacciato contenente moltissime **Stelle** con il **Sole** situato nel suo centro (vedi **Figura 77**).

Modello di Galassia secondo Kant e Lambert

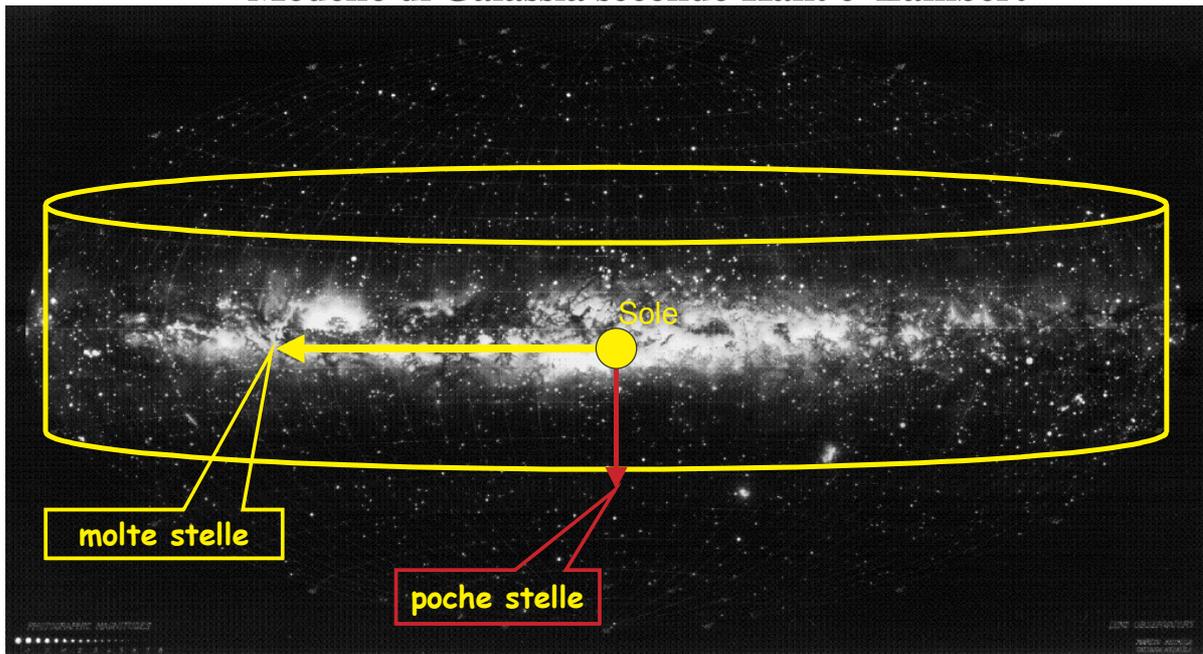


Fig. 77

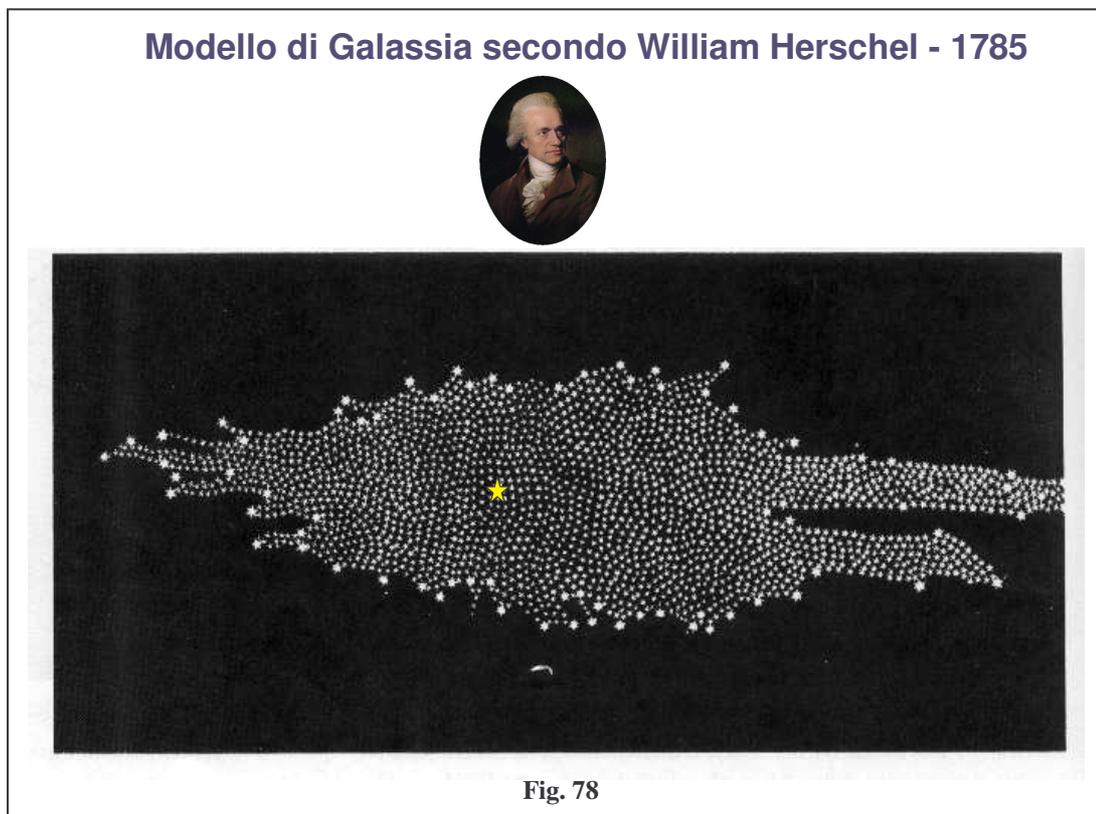
In questa maniera veniva spiegata la distribuzione a fascia osservata da **Terra**, in quanto dal **Sole** (situato sul **Piano Galattico**) si sarebbero osservate molte **Stelle** solo nelle direzioni prossime al piano mentre se ne sarebbero viste poche in direzione perpendicolare a questo (fuori dal piano) come schematizzato in **Figura 77**

Questa descrizione qualitativa della nostra **Galassia** fu affrontata in maniera rigorosamente scientifica da **William Herschel nel 1785** basandosi su dati osservativi e metodi statistico- matematici. **Herschel** studiò **683 regioni del cielo** e di queste conteggiò il numero di **Stelle** presenti fino ad una certa magnitudine limite. Nella sua indagine fece alcune assunzioni che alla luce delle attuali conoscenze non erano rigorosamente corrette e cioè che:

- Le **Stelle** sono uniformemente distribuite all'interno della **Galassia**
- Tutte le **Stelle** hanno la stessa luminosità intrinseca
- Non esiste **Assorbimento Interstellare**

Sulla base di queste assunzioni e conteggi **Herschel** confermò a grandi linee il modello di **Kant** descrivendo la nostra **Galassia** come una struttura ellissoidale schiacciata con il **Sole** posto quasi al centro, come è possibile vedere da una mappa creata dallo stesso **Herschel nel 1785** (vedi **Figura**

78). Un passo decisivo nella comprensione della struttura della nostra **Galassia** venne fatto nei due secoli successivi grazie all'impiego di telescopi sempre più potenti ed otticamente più accurati, nonché all'impiego di nuove tecniche osservative quali la fotografia e la spettroscopia .



Nel **1922** **Jacobus Kapteyn** avviò un progetto di catalogazione di posizioni e moti propri di **Stelle** appartenenti a **206 aree di cielo selezionate** fino alla magnitudine **12**, ma complete solo fino alla **10**. Grazie all'impiego della tecnica astrometrica, fotometrica e spettroscopica, **Kapteyn** riuscì a stimare le distanze delle **Stelle** e quindi la loro distribuzione spaziale. Il suo lavoro confermò sostanzialmente il modello di **Herschel** e cioè che la **Galassia** possiede una struttura sferoidale appiattita con il **Sole** in prossimità del centro. Inoltre **Kapteyn** fu in grado di fornire una dimensione fisica alla nostra **Galassia** valutabile in **2800 parsec di raggio e 550 parsec di altezza**, distanze alle quali la densità stellare scendeva fino al **10%** rispetto a quella massima presente al centro dello sferoide, mentre la distanza cresceva fino a **8500 parsec di raggio e 1700 parsec di altezza** per densità che scendevano sino all' **1%** . Il grosso errore commesso da **Kapteyn** nella modellizzazione della **Galassia** risiedeva nel fatto di non aver tenuto in conto l'**Assorbimento Interstellare** che rende le **Stelle**, in certe direzioni della **Galassia**, molto più deboli di quello che in realtà sono. Ad essere corretti **Kapteyn** era consapevole dell'esistenza del **Mezzo Interstellare** ma nonostante i suoi sforzi non riuscì mai a quantificarlo. Purtroppo questa assunzione errata, portò a sottostimare il volume della **Galassia**, poiché le **Stelle** lontane non risultavano più visibili. Per questo fatto si pensò che le **Stelle** fossero distribuite simmetricamente rispetto al **Sole** e che questo si trovasse al centro della **Galassia**. Anche **Shapley** nello stesso periodo non considerò gli effetti dell'**Assorbimento Interstellare** ma a differenza di **Kapteyn** ebbe più fortuna in quanto accentrò la sua attenzione non sulle **Stelle** ma sugli **Ammassi Globulari** che come è noto, al giorno d'oggi, sono oggetti molto distanti e luminosi, che trovandosi ad elevate latitudini galattiche e quindi lontane dal **Piano Galattico**, risentono in misura

molto minore gli effetti dell'Assorbimento Interstellare. In questo caso, grazie agli indicatori di distanza presenti in questi **Ammassi**, cioè alle **Stelle** variabili **RR Lyrae**, **Shapley** riuscì a determinare una distribuzione di oggetti a simmetria pressoché sferica di raggio **100 Kparsec** e con il **Sole** distante dal suo centro di una **decina di Kiloparsec**.

Oggi sappiamo che il valore del diametro dello sferoide di **Shapley** è circa il doppio di quello attualmente assunto, proprio perché l'Assorbimento Interstellare (non utilizzato nel suo modello) fa apparire gli ammassi più deboli e conseguentemente più lontani di quello che sono.

Con l'avvento del telescopio da 100 pollici di Mount Wilson nel 1923, **Hubble** chiarì la natura delle nebulose a spirale. Egli riuscì ad isolare e a misurare alcune variabili **Cefeidi** nelle nebulose **M31 (Andromeda)** e **M33 (Triangolo)**. Di queste ne determinò la distanza tramite il confronto della **Magnitudine Apparente** con la nota relazione **Periodo-Luminosità Assoluta**. **Hubble** arrivò alla conclusione che queste nebulose erano proprio delle **Galassie** simili alla nostra ma situate a grandissime distanze se confrontate con le distanze delle **Stelle** appartenenti al nostro sistema galattico.

Sulla scia di questa scoperta **B. Lindblad** nel 1926 ipotizzò la nostra **Galassia** come un sistema stellare in rotazione costituito da diversi sottosistemi coassiali che si muovono a differenti velocità. Questa teoria venne sviluppata da **J. H. Oort** che nel 1928 portò alla teoria cinematica della **Rotazione Differenziale della Galassia**. Dalla dispersione delle velocità di rotazione delle **Stelle** rispetto al **Sole Oort** ricavò una stima della massa della **Galassia**.

Nel 1944 **W. Baade** introdusse i primi concetti di **Popolazioni Stellari** prendendo in considerazione non solo gli aspetti cinematici della **Galassia** ma anche gli aspetti chimico cronologici tipici delle teorie di evoluzione stellare e nucleosintesi.

Con **N.G. Roman** si raggiunse nel 1954 la correlazione tra bassa metallicità ed alta velocità delle **Stelle**.

Finalmente nel 1962 si arriva con **O. J. Eggen, D. Lyndel-Bell e A.R. Sandage** ad un modello di **Galassia** che, se per qualche verso contiene delle inesattezze, nelle sue linee generali resta ancora valido. Questo modello parte dall'idea che la **Galassia** si sia generata in seguito ad un collasso gravitazionale durato meno di 200 milioni di anni da una perturbazione di densità. Con la fase di contrazione gravitazionale nella nube protogalattica si innescarono i processi di formazione stellare che diedero origine alle prime generazioni di **Stelle** con bassa metallicità e con orbite molto radiali ed ellittiche.

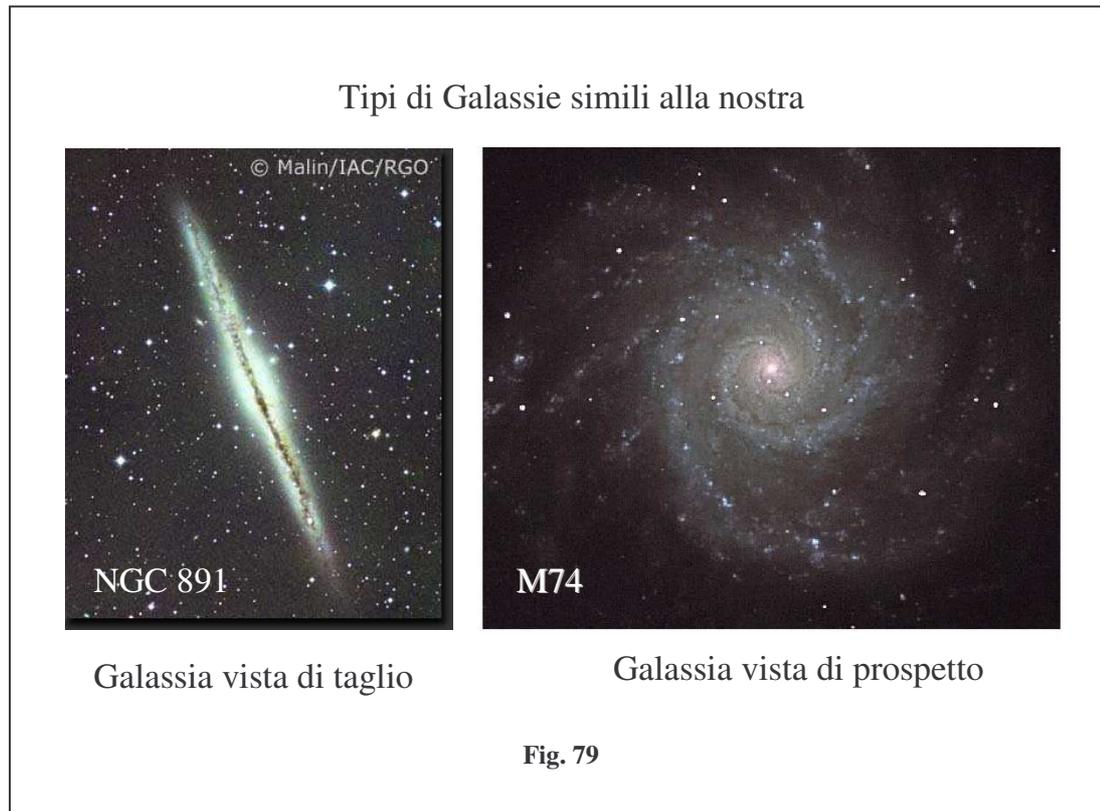
Nel frattempo il gas si dispose su di un disco piatto in rapida rotazione mentre altre **Stelle** produssero nuovi elementi pesanti che successivamente andarono ad arricchire il gas originario il quale produsse a sua volta nuove **Stelle** di seconda generazione con metallicità via via crescenti e orbite sempre più circolari e poco inclinate rispetto al **Piano Galattico**

Nel 1978 **L. Searle e R. Zinn** e **J. Yoshii e H. Saio** nel 1979 ritennero che il tempo di collasso in caduta libera del modello di **Eggen** fosse su tempi scala dell'ordine di alcuni miliardi di anni per la contrazione e formazione della popolazione esterna (**Alone**) durante una fase caotica del gas preesistente. Con **Sandage** nel 1990 si ebbe un ulteriore affinamento del modello di formazione dell'**Alone** proposto precedentemente da **Eggen, di Searle e Zinn**.

In questi ultimi anni lo studio della struttura della **Galassia** ha portato alla determinazione di nuove componenti galattiche e all'affinamento di quelle già note grazie all'ausilio di survey stellari profonde che forniscono, conteggi stellari, integrati da stime di distanze (fotometriche e spettroscopiche), di velocità radiali, di moti propri e di composizioni chimiche ottenute da osservazioni spettroscopiche e fotometriche.

In **Figura 79** sono rappresentate due **Galassie** a spirale simili alla nostra in cui nella immagine di sinistra la **NGC891** è osservata da **Terra** con il **Piano Galattico** orientato lungo la linea di vista (visione di taglio), mentre l'immagine di destra mostra la **M74** con il **Piano Galattico** orientato in maniera perpendicolare alla linea di vista (visione prospettica). Si noti nell'immagine di sinistra la

linea scura che attraversa il **Piano Galattico**, chiara indicazione della presenza del mezzo interstellare oscuro, mentre in quella di destra sono visibili i bracci a spirale tipici delle galassie simili alla nostra



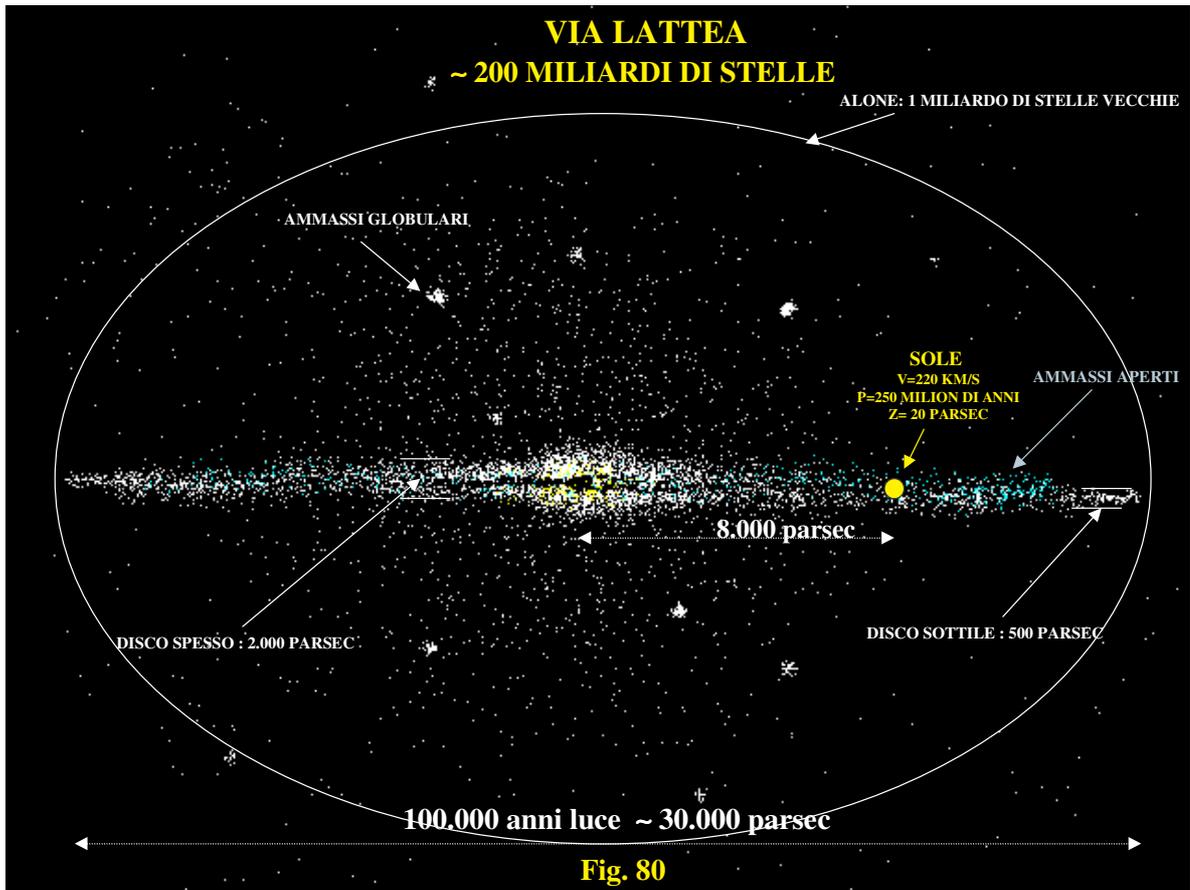
Componenti Principali della Galassia

Sulla base delle ultime conoscenze che abbiamo sulla struttura della nostra **Galassia** possiamo dire che questa è costituita da un enorme disco appiattito di circa **30 Kparsec** di diametro con un rigonfiamento centrale. In questo disco ci sono all'incirca **200 miliardi di Stelle** di cui il **Sole** occupa una posizione periferica a circa **8 Kparsec** dal centro galattico. Tutto il sistema di **Stelle del Piano Galattico** ruota intorno al centro galattico con rotazione differenziale, cioè con velocità differenti a seconda della distanza dal centro galattico. Il **Sole** ruota intorno al centro galattico su di un'orbita pressoché circolare ad una velocità di circa **220 Km/s** impiegando circa **250 milioni di anni** per compiere un giro completo di 360° (vedi **Figura 80**).

Le **Componenti Principali** che costituiscono la nostra **Galassia** sono :

- **Il Disco**
- **L'Alone**
- **La Corona**
- **Il Bulbo o Bulge**

- Il Nucleo



Disco

Il **Disco** è la zona più varia della struttura galattica in quanto in essa sono presenti oltre alle **Stelle** anche i gas e le polveri interstellari. Le **Stelle** sono rappresentate da tutti i tipi e classi spettrali conosciuti con temperature superficiali che vanno dai **2.000°C** fino ai **50.000°C** e colori dal **rosso all'azzurro**. Alcune di queste **Stelle** sono raggruppate in **Ammassi Aperti (Ammassi Galattici)** costituiti da centinaia ed in alcuni casi da migliaia di oggetti spazialmente vicini tra di loro (entro 10 parsec) e sparsi in tutto il disco galattico come: **Collinder 285** nel **Gran Carro** a **75 anni luce (a.l.)** da noi (il più vicino, anche se più assimilabile ad una **Associazione Stellare** che ad un ammasso per via delle sue grandi dimensioni di circa **30x18 a.l.**), **le Iadi** a **130 a.l.**, **le Pleiadi** a **400 a.l.** ecc. Nella **Galassia** ne sono stati osservati circa **1000** ma si ritiene che ce ne siano circa **15.000**. Quelli oltre i **5.000 a.l.** sono difficilmente visibili anche con i più potenti telescopi causa la presenza del **Mezzo Interstellare** che ne offusca la visione. Strettamente legati alle **Stelle** sono le nebulose planetarie e i resti di supernova che sono originati nelle fasi finali dell'evoluzione stellare.

Nel disco galattico troviamo anche la **Componente Gassosa** che si estende meno di quella stellare con una massa totale che si aggira sul **10%** di quella globale delle **Stelle**. Questo gas è costituito essenzialmente da idrogeno ed è concentrato in nubi di dimensioni variabili. Se queste nubi si trovano

in prossimità di **Stelle** molto calde e luminose (**Stelle** dei primi tipi spettrali), esse diventano visibili nell'ottico . In tal caso l'idrogeno viene ionizzato (una volta) e quindi tali nubi vengono chiamate **Regioni H-II** come nel caso della **nebulosa di Orione**.

Tuttavia la maggior parte del gas è fredda e quindi oscura per cui l'idrogeno si trova allo stato neutro e le nubi ad esso associate vengono chiamate **Regioni H-I**. Queste nubi emettono preferenzialmente nel radio alla lunghezza d'onda di **21 cm** per cui in questa banda è possibile osservare zone molto più profonde di quelle che si vedrebbero nell'ottico.

Il gas oltre ad essere presente sotto forma di nubi si trova anche diffuso nel piano del disco galattico con una densità media di **1 atomo per cm³**.

Se guardiamo con più attenzione la componente stellare vediamo che questa non è distribuita in maniera omogenea nel **Piano Galattico**. Infatti la distribuzione delle **Stelle** più luminose e quindi più giovani e massicce, che preferenzialmente si trova nel disco, spesso raggruppata in **Ammassi ed Associazioni**, risulta non uniforme ma concentrata in tre zone distinte. Queste zone assumono l'aspetto di **Bracci di Spirale** come mostrato in **Figura 81** dove è possibile vedere l'esistenza di un certo numero di bracci a spirale i cui più importanti sono: il **Braccio di Orione** entro cui si trova il nostro sistema solare, il **Braccio del Perseo** (esterno) e il **Braccio del Sagittario** (interno). Purtroppo le **Stelle** possono darci delle informazioni sulla struttura della nostra **Galassia** solo nelle immediate vicinanze dal **Sole** a causa dell'assorbimento interstellare. Come è stato detto in precedenza per avere una visione più profonda della **Galassia** bisogna analizzare la distribuzione delle nubi di idrogeno neutro **H-I** nella banda radio.

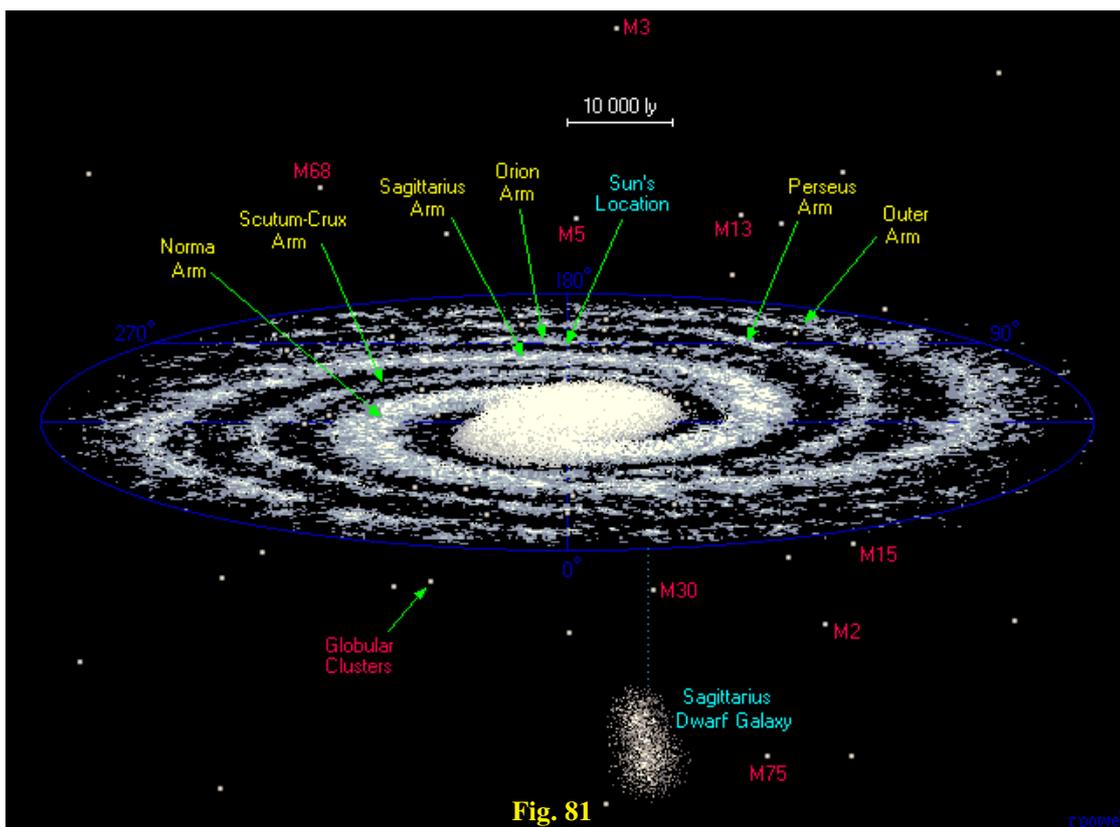


Fig. 81

Combinando tutte le osservazioni radio si è arrivati a determinare le dimensioni della **Galassia** che ben si accordano con le dimensioni ottenute dall'analisi della distribuzione degli **Ammassi Globulari**. In più le osservazioni radio hanno permesso di valutare la distanza tra i **Bracci a Spirale** sia interni che esterni alla posizione del **Sole** rispetto al centro galattico. In dettaglio, il **Braccio**

esterno del Perseo dista **circa 2.000 parsec** da noi mentre il nostro **Sole** si trova sul bordo interno del **Braccio di Orione** a poche **centinaia di parsec** dal centro di tale braccio, come è possibile intuire dalla **Figura 81**.

Quando si parla di **Disco** più propriamente si parla di quella regione della **Galassia** appartenente ad un disco schiacciato di **Stelle** gas e polveri dello spessore medio di circa **600 parsec** chiamato semplicemente **Disco Sottile**. Ad essere rigorosi questo disco è stato recentemente suddiviso in 3 sottostrutture: **Disco Giovane, Intermedio e Vecchio**.

Disco Giovane

Nel **Disco Giovane**, con uno spessore medio di **circa 200 parsec**, si trovano nei bracci a spirale **Stelle** molto giovani (**100 milioni di anni**) di **Popolazione I estrema (Stelle tipo O - B)** con una grande abbondanza di metalli pesanti (**da 1 a 2,5 volte l'abbondanza solare**) o detto in altri termini **Stelle** con elevata **Metallicità**. Ricordiamo che in astronomia la **Metallicità** di una **Stella** consiste nella percentuale di materia presente in essa diversa da idrogeno e elio. Solitamente si rappresenta l'**Indice di Metallicità** come il logaritmo del rapporto dell'abbondanza di ferro, o di un altro elemento pesante della **Stella** rispetto a quella del **Sole**, che messa in forma analitica diventa:

$$\text{Indice di Metallicità} = \left[\frac{Fe}{H} \right] = \log_{10} \frac{\left[\frac{n(Fe)}{n(H)} \right]_{Stella}}{\left[\frac{n(Fe)}{n(H)} \right]_{Sole}}$$

dove il suffisso **n** davanti a **Fe** e **H** indica il numero di atomi dei due elementi.

Per il nostro **Sole** le abbondanze chimiche **X_O, Y_O, Z_O** che stanno ad indicare la percentuale di **H** di **He** e di metalli come **Li, Be, B, C, N, ...** sono:

$$X_O = 71\% \text{ (H)}$$

$$Y_O = 27\% \text{ (He)}$$

$$Z_O = 2\% \text{ (Li, Be, B, C, N, ...)}$$

Disco Intermedio

Il **Disco Intermedio** esterno a quello **Giovane** si estende dai **100 ai 250 parsec** rispetto al piano ed in questo strato si trovano **Stelle** meno giovani di quelle del disco precedente con meno metalli (**abbondanza da 0,5 a 1 volta quella solare**) e di tipi spettrali che vanno dall' **A** a quelli più avanzati. Queste **Stelle** vengono chiamate **Stelle di Popolazione I Intermedia**.

Disco Vecchio

Il **Disco Vecchio** esterno a quello **Intermedio** si estende dai **250 ai 325 parsec** e contiene **Stelle** più vecchie del Sole con **abbondanza di metalli pari a 1/10** di quella solare. A differenza delle **Stelle** appartenenti ai 2 precedenti dischi che si muovono sul **Piano Galattico** con orbite sostanzialmente circolari, queste di **Popolazione I Vecchia** invece si muovono su orbite leggermente ellittiche con una inclinazione non nulla rispetto al **Piano Galattico**.

Ovviamente quando parliamo di spessore dei dischi intendiamo riferirci a dei valore puramente indicativi, in quanto oltre a non essere definiti in maniera assoluta non sono costanti per tutta l'ampiezza della **Galassia**. Come vedremo più avanti la distribuzione di densità stellare segue una

legge esponenziale che porta ad avere un assottigliamento dello spessore del disco dal centro della **Galassia** verso la periferia. Pertanto i valori che abbiamo dato nelle righe precedenti sono rappresentativi di quello che potrebbero essere gli spessori dei dischi alla distanza del nostro **Sole** dal centro galattico.

Disco Spesso

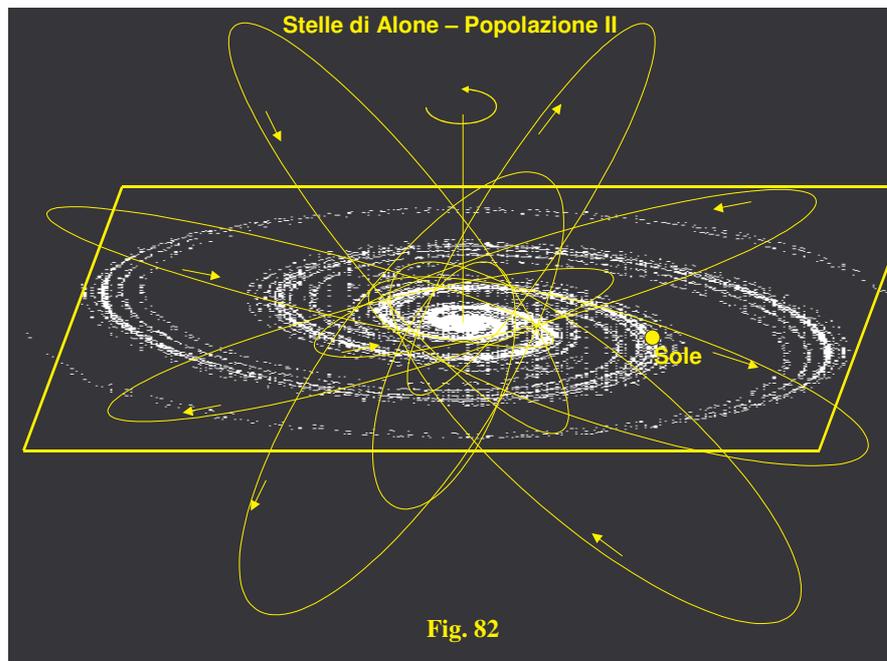
Un'altra struttura non ancora ben definita è quella che va sotto il nome di **Disco Spesso**.

I conteggi stellari suggeriscono che questa struttura si estenda fino a **1000 – 1400 parsec** sopra e sotto il piano all'altezza del **Sole**. Sembrerebbe che **solo l'1% delle Stelle** vicine al **Sole** appartenga a questo disco occupando una posizione ai limiti del **Disco Sottile** e quantificabile in circa **1 miliardo di masse solari**. In un primo tempo sembrava che questi oggetti facessero parte dell'**Alone** (vedi più avanti) ma studi di cinematica hanno messo in evidenza che questo disco ruota ad una velocità di circa **180 Km/s** poco compatibile con le velocità delle **Subnane** dell'**Alone** che si aggirano solo sui **40 Km/s**. Questo fatto viene anche rafforzato dalla elevata metallicità di queste **Stelle** se confrontata con la medesima delle **Stelle di Alone**. Tuttavia le **Stelle** di questo disco hanno una più alta velocità verticale delle **Stelle di Disco Sottile**. D'altra parte l'esistenza di questo **Disco Spesso** è motivata anche dal gradiente della dispersione delle velocità esistente tra questo e il **Disco Sottile**.

Alone

L'**Alone**, invece, è una struttura di forma sferoidale che avvolge il **Piano Galattico** e che si estende fino a **30 Kparsec** dal centro della **Galassia** con uno schiacciamento di circa il **70% (rapporto tra asse minore e asse maggiore dello sferoide)**.

Questa struttura contiene oggetti molto vecchi con masse inferiori a **0,8 masse solari** e con un'età di circa **10 ÷ 13 miliardi di anni** e per questa ragione le **Stelle d'Alone** vengono classificate come **Stelle di Popolazione II estrema**. L'**Alone** include sistemi di **Ammassi Globulari**, **Stelle** ad alta velocità povere in metalli e **Stelle** povere in metalli ad alte latitudini galattiche



. La massa totale delle **Stelle di Alone** è pari solo a **1 miliardo di masse solari**. In particolare esistono **Stelle Subnane** povere in metalli ($-3 < [\text{Fe}/\text{H}] < -1$) che hanno grandi velocità relative rispetto al **Sole** e che viaggiano su orbite molto ellittiche disposte in maniera casuale rispetto al **Piano Galattico** con velocità dell'ordine di **40 Km/s** (vedi **Figura 82**) secondo la componente di rotazione galattica, ma con alte velocità lungo la componente verticale al **Piano Galattico**. A differenza del disco galattico, in cui le **Stelle** orbitano su orbite circolari con velocità orientate tutte con lo stesso verso, la velocità delle **Stelle di Alone** essendo casuale ha un valor medio prossimo a zero.

Inoltre nell'**Alone** si trovano innumerevoli **Ammassi Globulari (circa 200)** costituiti da decine e centinaia di migliaia di **Stelle** molto vicine tra di loro a simmetria sferica disposte all'incirca simmetricamente rispetto al centro galattico con metallicità basse ($[\text{Fe}/\text{H}] < -1$) e che possono essere considerate come i traccianti classici dell'**Alone**.

Le Variabili **RR Lyrae** sono molto utili per definire la scala delle distanze degli oggetti presenti nell'**Alone**. A questo proposito si è notato che le **RR Lyrae** nei pressi del **Sole** mostrano una distribuzione appiattita mentre a distanze molto grandi sono distribuite con una simmetria sferica.

Corona

La **Corona** è la parte più estesa della **Galassia** e copre lo spazio tra i **30.000 parsec** (parte periferica dell'**Alone**) e i **100.000 parsec** dal centro galattico. E' anche la parte più misteriosa della nostra **Galassia** poiché si pensa che **più del 90 % della massa dell'intera Galassia** sia confinata in questa zona sotto forma di materia oscura con una massa presumibilmente pari a **10^{12} masse solari**.

Bulge

Il **Bulge o Bulbo** rappresenta il rigonfiamento centrale della **Galassia** con le dimensioni di circa **3 Kparsec**. Questa è una regione della **Galassia** dominata da **Stelle di Popolazione II** vecchie di circa **10 miliardi di anni**. Tuttavia questa componente ha un ampio intervallo di metallicità (da **0,1 Z_{\odot}** a **10 Z_{\odot}**) il che lascia presupporre che ci sia una parte di oggetti decisamente più giovani (dell'ordine di **qualche miliardo di anni**). Causa l'interposizione del mezzo interstellare (polveri e gas) il **Bulge** diventa trasparente solo per certe lunghezze d'onda. Le **Stelle** del **Bulge** sono dominate da moti disordinati ma presentano anche una componente significativa di rotazione, che rende la struttura leggermente schiacciata in direzione perpendicolare al disco. La velocità di rotazione del **Bulge** è lineare con la distanza ed è relativamente lenta rispetto alla rotazione delle **Stelle** di disco. Infatti la sua velocità di rotazione è stata valutata intorno ai circa **25 Km/s/Kpc**.

Nucleo

Il **Nucleo** rappresenta la parte centrale della nostra **Galassia** ed è situato in direzione della costellazione del Sagittario. Solo recentemente si sono avute informazioni più precise circa la struttura del **Nucleo** in quanto essendo oscurato dalla materia interstellare non era possibile osservarlo nella banda ottica. Solo con osservazioni nella banda Infrarossa e Radio e nella banda dei raggi X e Gamma si è riusciti a vederne la struttura. Osservazioni radio hanno messo in evidenza la presenza di un disco di gas neutro delle dimensioni dai **100 ai 1.000 parsec**, mentre un anello molecolare di circa **20.000 masse solari** è situato entro un raggio tra i **2 e gli 8 parsec** dal centro. La presenza di **Stelle** con alta velocità vicino al centro è stata messa in evidenza con osservazioni nell'infrarosso con il telescopio Keck da 10 metri. Sono state osservate le velocità di **20 Stelle** molto vicine al centro galattico (entro **2 parsec**) per un periodo di 3 anni. Dall'analisi delle osservazioni si è arrivati alla conclusione che queste **Stelle** orbitano attorno al centro galattico ad una velocità di circa **1.000 Km/s**. Queste alte

velocità supportate da un'alta densità stellare in quella regione fanno credere all'esistenza di un **buco nero** avente una massa di circa **2,5 – 3,5 milioni di masse solari**. L'ipotesi di un buco nero nel centro è anche supportata da osservazioni di emissione Gamma provenienti da una piccola regione del **Nucleo** così come la variabilità nella banda X della sorgente **Sagittario A*** che suggerisce dimensioni non più grandi di **1 U.A.** (vedi **Figura 83**)

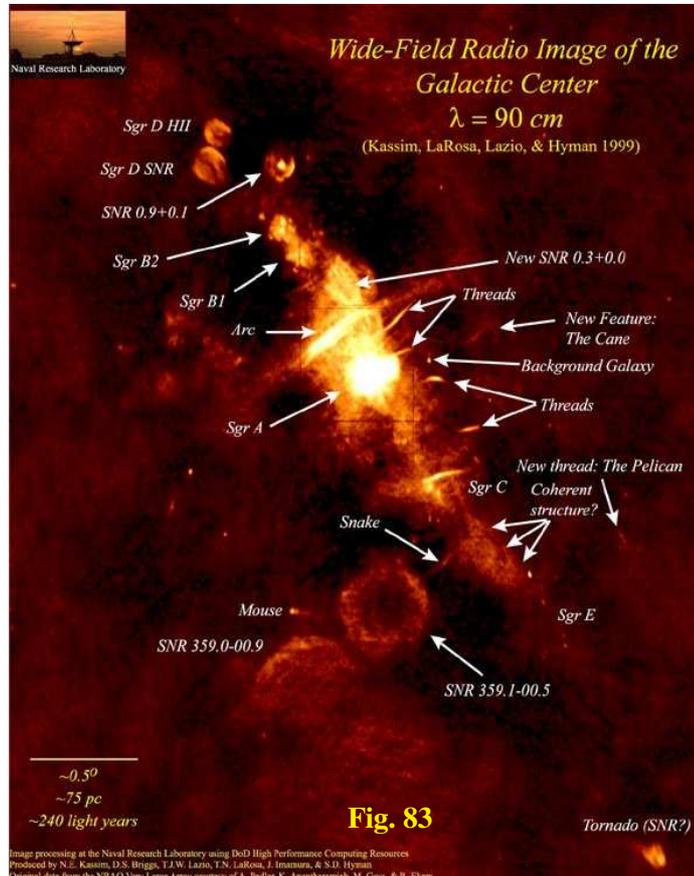


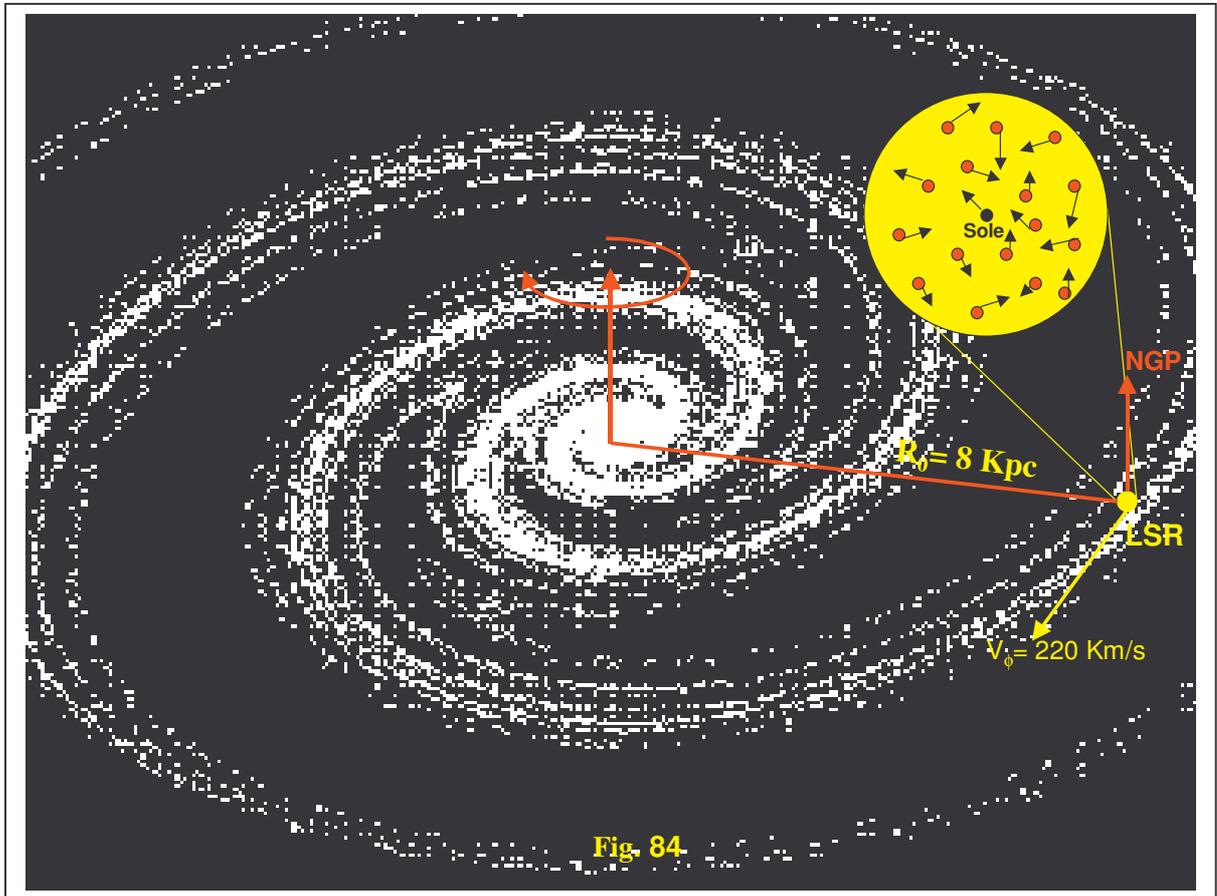
Fig. 83

Local Standard of Rest (LSR)

Come abbiamo visto in precedenza il **Sole** e tutte le **Stelle** appartenenti al **Disco Galattico** si muovono intorno al suo centro su orbite “quasi” circolari con velocità tangenziali differenti a seconda della distanza che esse hanno dal centro galattico.

Per il momento soffermiamo la nostra attenzione sul moto del **Sole** e delle **Stelle** nelle sue immediate vicinanze, confinate cioè entro un volume sferico di qualche decina di parsec di raggio. Per quanto detto in precedenza assumiamo idealmente che il **Sole** e le **Stelle** di questo volume oltre a rivolvere globalmente attorno al centro galattico ad una certa velocità abbiano all'interno del volume stesso delle velocità peculiari distribuite in maniera casuale (vedi **Figura 84**) tali per cui la somma vettoriale di tutte le velocità peculiari delle **Stelle** sia prossima a zero. Con queste assunzioni si arriva così alla definizione qualitativa di un punto ideale della **Galassia** che ha la caratteristica di trovarsi alla stessa distanza del **Sole** dal centro galattico (**8 Kpc**), e di muoversi intorno ad esso in senso

retrogrado se osservato dal **Polo Nord Galattico (NGP)** su di un'orbita circolare ad una **velocità tangenziale costante di ~220 Km/s**. Questo punto viene chiamato "**Local Standard of Rest**" (LSR) ed è utilizzato come punto di riferimento nello studio della struttura e cinematica della **Galassia**.



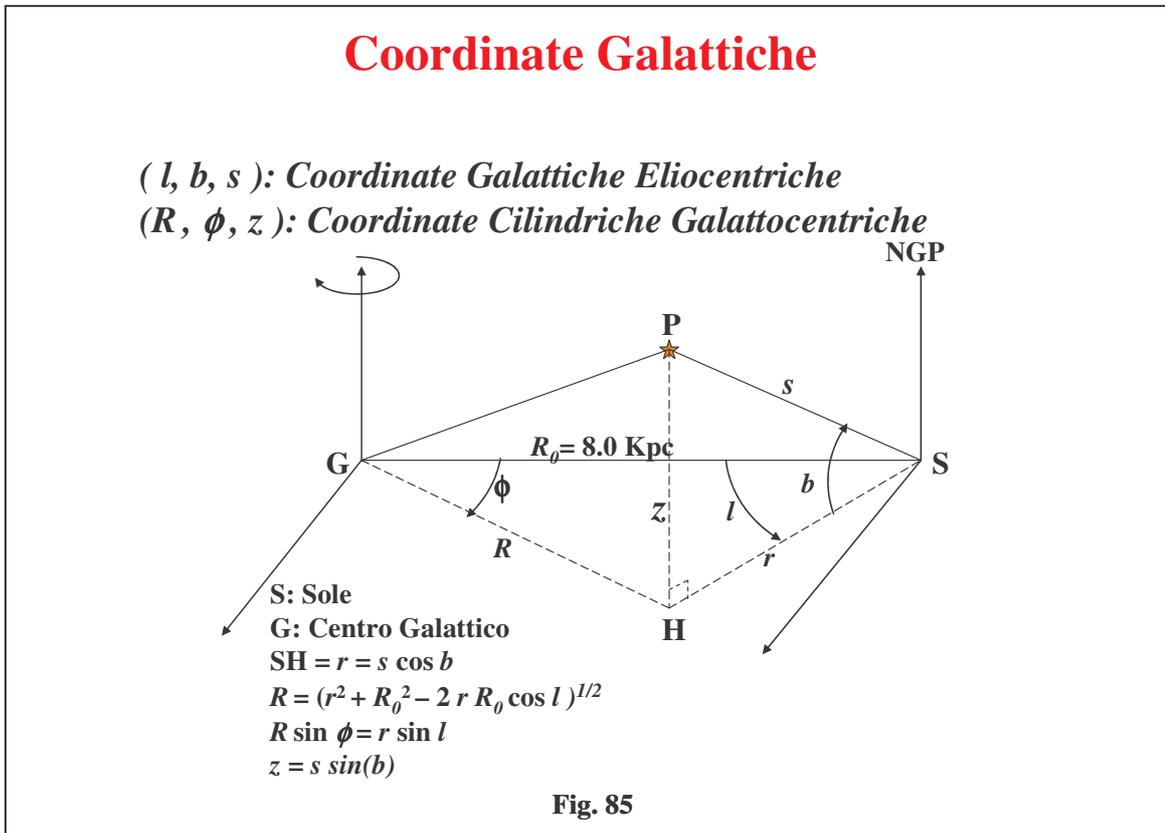
Coordinate Galattocentriche

Per definire la posizione di una qualsiasi **Stella** appartenente alla nostra **Galassia** abbiamo visto che uno dei tanti sistemi di coordinate utilizzato è quello **Galattico o Quinto Sistema**. Ricordiamo che questo sistema di coordinate è centrato sulla **Terra**, o meglio nel baricentro del sistema solare e le coordinate di una qualsiasi **Stella** sono: la **Longitudine Galattica l** , che viene misurata in gradi sul **Piano Galattico** a partire dal centro galattico in senso antiorario fino ad incontrare il meridiano galattico passante per la **Stella**, la **Latitudine Galattica b** che viene misurata in gradi (positiva verso il **Nord** e negativa verso il **Sud Galattico**) dal **Piano Galattico** verso la **Stella** lungo il meridiano che la contiene (vedi **Figura 85**) e dalla distanza s della **Stella** dal baricentro sistema solare. In realtà per studi sulla struttura della **Galassia** è conveniente utilizzare un altro sistema di coordinate centrato questa volta nel **Centro Galattico (G)**. Questo sistema chiamato sistema di **Coordinate Cilindriche Galattocentriche** con origine in **G** (vedi **Figura 85**) è costituito dalle coordinate **R, ϕ, z** .

La coordinata cilindrica **R** rappresenta la distanza (usualmente in parsec) della proiezione della **Stella** sul piano galattico dal centro della **Galassia**, mentre l'angolo **ϕ** è l'angolo secondo cui si osserva la

proiezione della **Stella** sul **Piano Galattico** a partire dal centro **Galassia** verso la direzione del **Sole** contato in gradi positivamente in senso retrogrado se visto dal **Polo Nord Galattico**, mentre l'altezza **z** rappresenta l'altezza della **Stella** dal **Piano Galattico** in parsec.

Il passaggio dal **Sistema di Coordinate Galattico** a quello **Galattocentrico** è relativamente facile ammettendo di conoscere la distanza **R₀** del **Sole** dal centro della **Galassia** e le coordinate **l, b, s** della **Stella**.



Infatti dalla **Figura 85** si vede che la distanza **SH = r** si può scrivere come:

$$r = s \cdot \cos(b)$$

mentre la distanza della **Stella** proiettata sul **Piano Galattico** dal centro della **Galassia** **GH = R** è data, utilizzando la formula di **Carnot**, da:

$$R = \sqrt{r^2 + R_0^2 - 2 \cdot r \cdot R_0 \cdot \cos(l)}$$

Il valore di **ϕ** (a meno dell'incertezza sul quadrante) si ricava da:

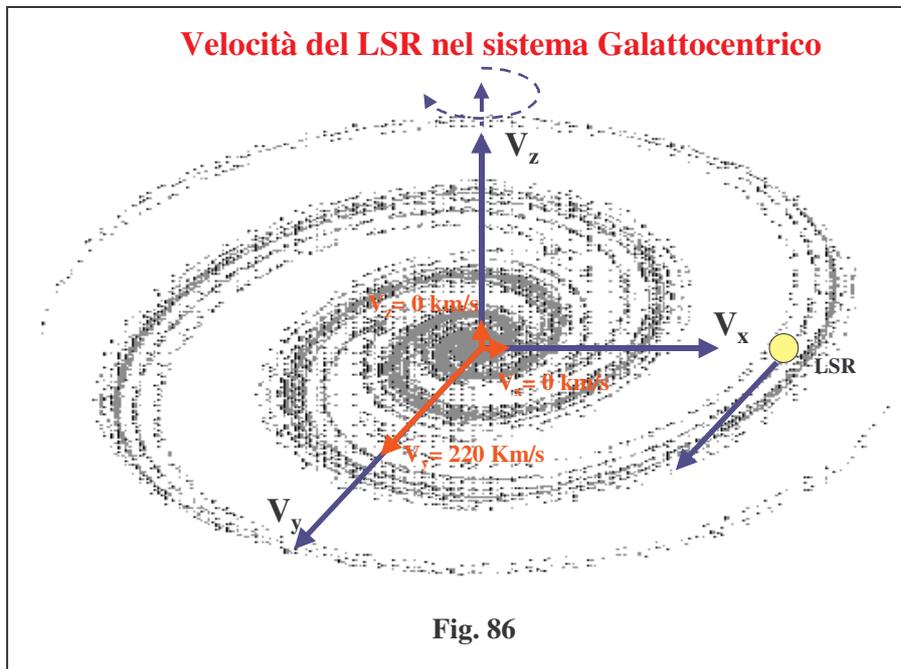
$$\sin(\phi) = \frac{r \cdot \sin(l)}{R}$$

mentre il valore di **z** è dato da:

$$z = s \cdot \sin(b)$$

Pertanto in questo nuovo sistema di coordinate le componenti di velocità del **LSR** secondo la terna

di assi cartesiani centrati nel centro galattico sono: V_x verso il **LSR**, V_y a 90° dal **LSR** in senso retrogrado, V_z perpendicolare al **Piano Galattico** e diretto verso l'emisfero **Nord Galattico** (vedi **Figura 86**) ed hanno i seguenti valori:

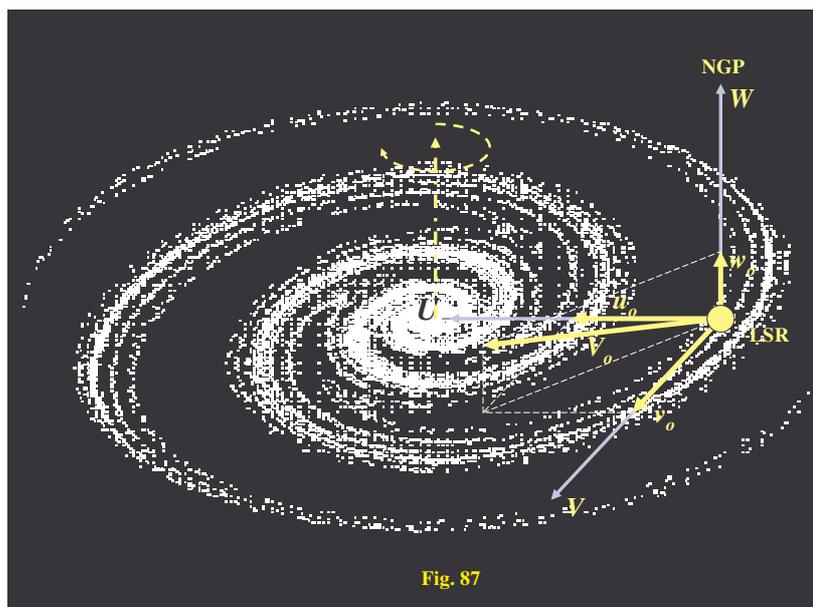


$V_x = 0 \text{ Km/s}$

$V_y = 220 \text{ Km/s}$

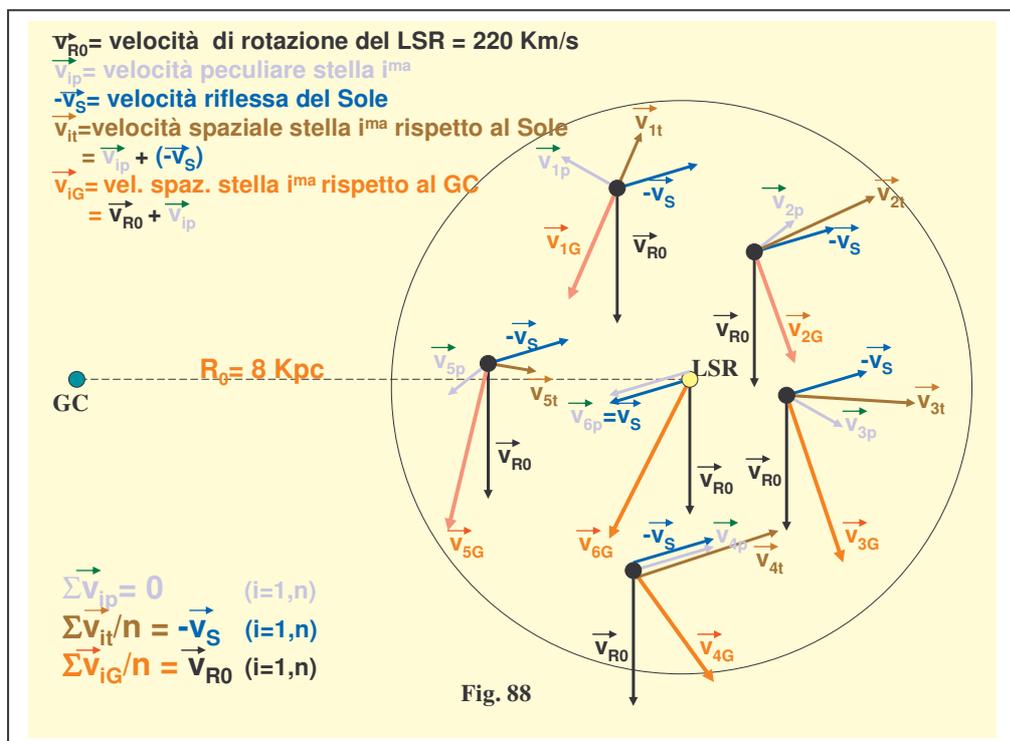
$V_z = 0 \text{ Km/s}$

Invece la velocità di una **Stella** osservata dal **Local Standard of Rest** può essere scomposta in 3 componenti: U diretta verso il centro galattico, V nel verso della rotazione galattica e W nella direzione del **Polo Nord Galattico NGP** (vedi **Figura 87**)



Componenti del Moto Solare rispetto al LSR

Se volessimo capire idealmente come si muovono le **Stelle** nelle immediate vicinanze del **Sole** sia rispetto al **Sole** che al **LSR** oppure rispetto al centro della **Galassia** possiamo fare riferimento alla **Figura 88** in cui per semplicità si sono schematizzate $n = 6$ **Stelle** (compreso il **Sole**) tutte dentro una sfera del diametro di qualche decina di parsec centrata nel **Sole** e nel **LSR**. Per quanto detto prima ogni **Stella** “ideale”, a prescindere dal moto globale di rotazione galattico, avrà una velocità propria peculiare \vec{V}_{ip} (segnata con frecce di colore verde) rispetto al **LSR** (supposto fisso) distribuita in maniera casuale al punto che si possa ammettere che la somma vettoriale delle velocità peculiari delle **Stelle** sia uguale a zero $\sum \vec{V}_{ip} = \mathbf{0}$ (con $i = 1, n$).



Tuttavia se ci ponessimo sul **Sole**, al centro della sfera, dotato di velocità \vec{V}_s (velocità peculiare del **Sole**) verso una certa direzione apicale, noi noteremmo da questo riferimento solo le velocità spaziali delle **Stelle** ideali \vec{V}_{it} che contengono il moto riflesso del **Sole**, per cui la somma vettoriale delle \vec{V}_{ip} con le velocità riflesse del **Sole** $-\vec{V}_s$ divisa per il numero n di **Stelle** ci darebbe appunto il

valore della velocità del **Sole** rispetto al **LSR** con il segno cambiato $\sum \vec{V}_{it}/n = -\vec{V}_s$.

Ben diversa sarebbe la situazione se guardassimo le **Stelle** della sfera dal centro della **Galassia**. In questo caso noteremmo che tutte le **Stelle** si muovono concordemente intorno al centro galattico con velocità \vec{V}_{iG} (segnate con frecce rosse) simili ma non uguali sia come modulo che come direzione.

In realtà queste **Stelle**, compreso il **Sole**, contengono le loro velocità proprie peculiari \vec{v}_{ip} oltre ad una velocità comune di rotazione attorno al centro galattico \vec{v}_{R0} , per cui le velocità \vec{v}_{iG} risultano dalla somma vettoriale delle componenti peculiari con quella rotazionale galattica. Quindi la somma delle \vec{v}_{iG} divisa per il numero n di **Stelle** mette in evidenza proprio la velocità tangenziale di rotazione galattica \vec{v}_{R0} del gruppo di **Stelle** all'interno della sfera ($\sum \vec{v}_{iG} / n = \vec{v}_{R0}$).

Finora abbiamo considerato un campione ideale di **Stelle**, dentro una piccola sfera centrata nel **Sole**, assumendo che queste siano distribuite nello spazio delle velocità rispetto al **Sole** secondo sfere concentriche supposte di uguale densità di velocità e con origine nel punto velocità del **Sole**. Se così fosse la distribuzione della densità di velocità secondo ciascun asse della terna U , V e W con origine nel **Sole** dovrebbe mostrare distribuzioni gaussiane con dispersioni di velocità σ tutte uguali secondo ogni asse e per ogni popolazione stellare considerata. In realtà quello che si osserva è sempre una distribuzione approssimativamente gaussiana con valori medi centrati nelle componenti delle velocità (riflesse) del **Sole** ma con dispersioni di velocità σ nei vari assi tutte diverse tra di loro. In particolare risulta che la dispersione secondo la componente U è sempre più grande di quella V che a sua volta è più grande di quella W indipendentemente dal tipo spettrale considerato. Infatti come è possibile vedere in **Figura 89** nei 3 riquadri in alto sono rappresentate le densità di velocità per un campione di 332 **Stelle** vicine di sequenza principale appartenenti ai primi tipi spettrali fino a **F1**, mentre nei 3 riquadri in basso sono rappresentate 510 **Stelle** nane di tipi spettrali **K** e **M** (**Binney e Merrifield, 1998**). Le velocità rappresentate sono quelle osservate dal **Sole** per cui tutte le densità di

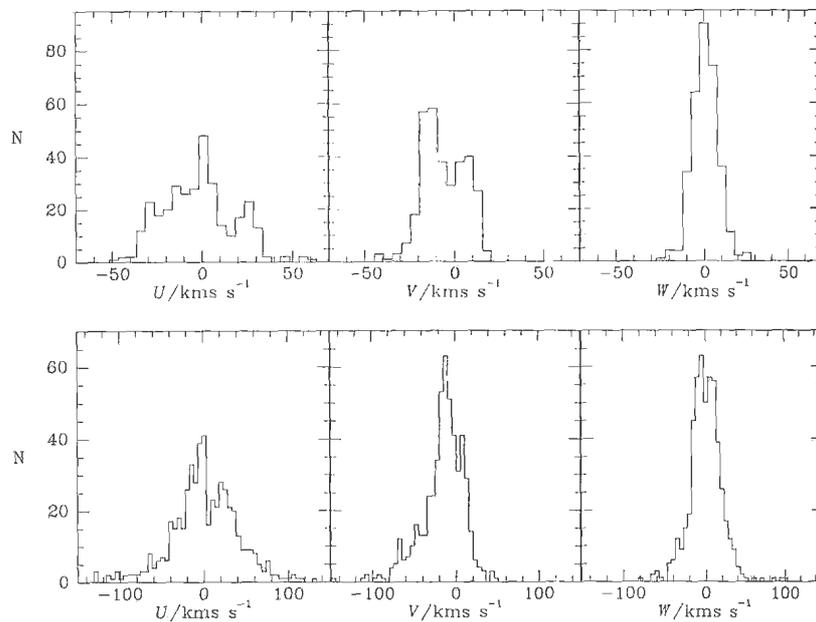
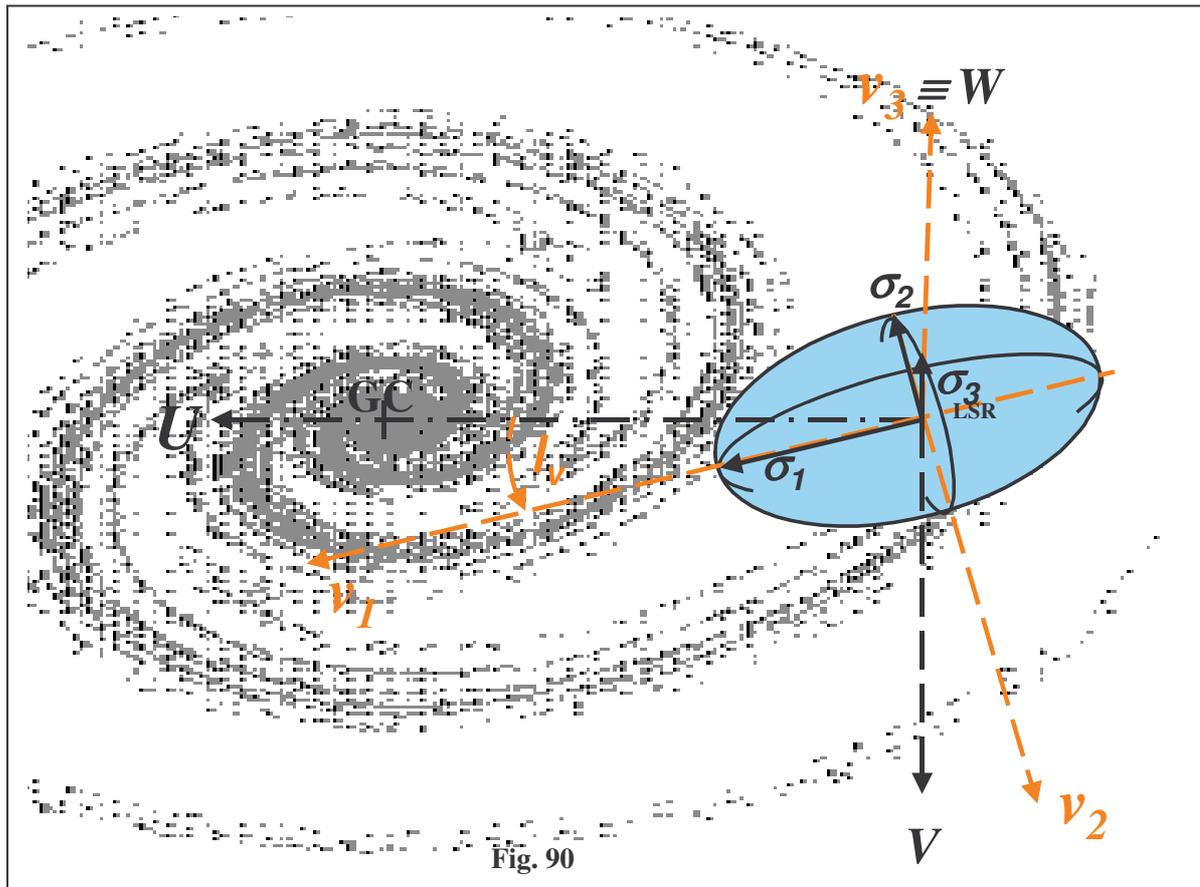


Fig. 89

velocità nelle 3 componenti contengono il moto del **Sole** riflesso. Poiché le distribuzioni di densità delle velocità dipendono dal tipo di popolazione stellare che si considera (**Figura 89**) se dovessimo rappresentare spazialmente le dispersioni di velocità delle **Stelle** vicine vedremmo che queste si dispongono approssimativamente su di un ellissoide triassiale il cui asse maggiore, giacente praticamente sul **Piano Galattico**, mostra uno spostamento in longitudine galattica in senso antiorario di un certo angolo l detto **angolo di deviazione del vertice** (vedi **Figura 90**).



Tuttavia di ellissoidi triassiali ne esistono diversi a seconda del tipo spettrale considerato così come delle componenti del moto solare anch'esse dipendenti dalla popolazione stellare.

Infatti in **Figura 91** sono riportati 3 grafici che mostrano come le componenti delle velocità del **Sole** U, V, W varino a seconda dell'indice di colore ($B-V$) ed in ultima analisi del tipo spettrale del gruppo di **Stelle** considerato (**Binney e Merrifield, 1998**). La prima cosa che si osserva è che le componenti U, W del moto solare sono praticamente costanti per tutti i tipi spettrali, mentre la componente V mostra un andamento crescente in funzione del colore, nel senso che **Stelle** blu, dei primi tipi spettrali, e conseguentemente giovani viaggiano più piano se viste dal **Sole**, mentre le **Stelle** rosse degli ultimi tipi spettrali e conseguentemente, vecchie (ma non sempre) viaggiano più veloci se osservate sempre dal **Sole**. Pertanto l'assunzione che le **Stelle** vicine abbiano moti peculiari distribuiti a caso non è del tutto corretta in quanto se così fosse si avrebbero ancora le componenti del moto solare diverse tra di loro ma sarebbero costanti per qualsiasi indice di colore o tipo spettrale. Il fatto che in genere le **Stelle** blu dei primi tipi spettrali mostrino velocità della componente solare V basse sta a significare che queste essendo **Stelle** giovani stanno preferibilmente sul **Piano Galattico** ed essendo anche vicine al **Sole** hanno un moto di rotazione galattico molto vicino a quello solare, per cui i loro moti propri peculiari, distribuiti a caso, hanno un valore medio prossimo a zero. Diversa è la situazione per le **Stelle** rosse solitamente vecchie, di tipi spettrali più avanzati (**Stelle di Popolazione II**), che appartenendo al **Disco Spesso** e all'**Alone** hanno velocità di rotazione intorno al centro galattico più lente e quindi mostrano un alto moto medio relativo rispetto al **Sole**. Questo fatto lo si può comprendere meglio osservando la **Figura 92** (**A. Spagna, 1995**) in cui sono stati dedotti i moti propri delle **Stelle** di una selezionata zona di cielo intorno al **Polo Nord Galattico** (NGP) dal **Catalogo GSC2**.

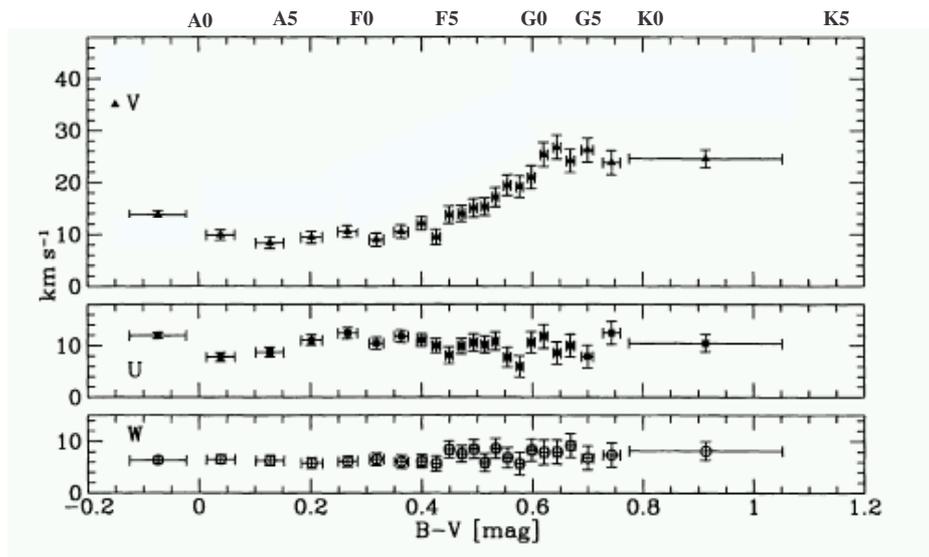


Fig. 91

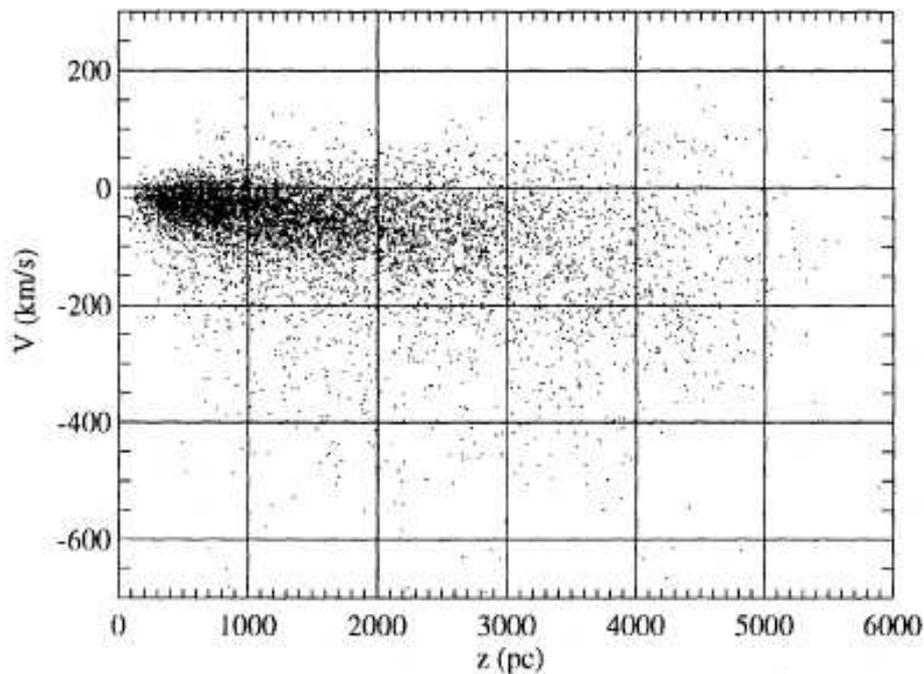


Fig. 92

Come si può constatare dalla **Figura 92** le **Stelle**, a seconda dell'altezza z perpendicolare al **Piano Galattico**, mostrano delle velocità relative della componente V rispetto al **Sole** che tendono a crescere (in senso assoluto) linearmente con la distanza dal **Piano Galattico**, mentre nel contempo aumenta anche la dispersione delle velocità. Questa è l'indicazione che le **Stelle** di **Disco Spesso** e soprattutto quelle di **Alone** tendono a viaggiare intorno alla **Galassia** sempre meno velocemente lungo la componente V man mano che aumenta la $|z|$. Il fenomeno poc'anzi descritto va sotto il nome di **Asymmetric Drift** che può essere rappresentato mediante la relazione:

$$V_a = V_{LSR} - \langle V \rangle$$

Dove con V_a si indica l'Asymmetric Drift del gruppo di **Stelle** osservato dal **LSR** e cambiato di segno, mentre $\langle V \rangle$ rappresenta il valor medio della componente di velocità di rotazione galattica del gruppo di **Stelle** considerato. Da questi studi si è visto che le dispersioni di velocità σ_1 , σ_2 , σ_3 ottenute per le **Stelle** vecchie sono più grandi delle rispettive dispersioni per le **Stelle** giovani, mentre la deviazione del vertice l dell'ellissoide delle velocità è più piccola per le **Stelle** vecchie che per quelle giovani, in accordo con la seguente **Tabella 6** (Binney e Merrifield, 1998):

Tabella 6

$(B-V)_{\min, \max}$	$\sigma_1/\text{km s}^{-1}$	σ_2/σ_1	σ_z/σ_1	l_v/deg
-0.238 0.139	14.35 ^{+0.49} _{-0.40}	0.65 ^{+0.07} _{-0.06}	0.38 ^{+0.05} _{-0.10}	30.2 ^{+4.7} _{-5.3}
0.139 0.309	20.17 ^{+0.50} _{-0.43}	0.47 ^{+0.07} _{-0.03}	0.40 ^{+0.02} _{-0.10}	22.8 ^{+2.8} _{-3.0}
0.309 0.412	22.32 ^{+0.56} _{-0.47}	0.53 ^{+0.06} _{-0.04}	0.42 ^{+0.03} _{-0.09}	19.8 ^{+3.2} _{-3.4}
0.412 0.472	26.26 ^{+0.80} _{-0.59}	0.60 ^{+0.06} _{-0.04}	0.46 ^{+0.03} _{-0.09}	10.2 ^{+5.0} _{-5.4}
0.472 0.525	30.37 ^{+0.96} _{-0.70}	0.60 ^{+0.06} _{-0.04}	0.44 ^{+0.04} _{-0.11}	6.9 ^{+5.1} _{-5.3}
0.525 0.582	32.93 ^{+1.09} _{-0.75}	0.66 ^{+0.06} _{-0.05}	0.46 ^{+0.04} _{-0.10}	1.9 ^{+6.0} _{-6.1}
0.582 0.641	37.64 ^{+1.37} _{-0.94}	0.62 ^{+0.08} _{-0.03}	0.56 ^{+0.01} _{-0.12}	10.2 ^{+5.6} _{-6.0}
0.641 0.719	38.13 ^{+0.71} _{-0.31}	0.62 ^{+0.06} _{-0.04}	0.54 ^{+0.02} _{-0.10}	7.6 ^{+5.9} _{-6.0}
0.719 1.543	37.20 ^{+1.41} _{-0.93}	0.69 ^{+0.06} _{-0.05}	0.49 ^{+0.04} _{-0.11}	13.1 ^{+6.7} _{-7.6}
0.610 1.543	37.91 ^{+0.79} _{-0.63}	0.65 ^{+0.04} _{-0.03}	0.54 ^{+0.02} _{-0.05}	10.3 ^{+3.9} _{-3.9}

Da quanto è emerso dai grafici della **Figura 91** le componenti delle velocità del **Sole** secondo gli assi U, V, W sono variabili a seconda della popolazione stellare considerata. Se volessimo avere la velocità realistica del **Sole** rispetto al **LSR** occorrerebbe considerare la funzione S che ha la seguente forma:

$$S^2 = \sum_k^N (\hat{x}_k \hat{v}_o + v_{\text{los}})^2$$

in cui le $\hat{x}_k \hat{v}_o$ rappresentano le componenti della velocità del **Sole** rispetto al **LSR** lungo le direzioni delle N **Stelle**, mentre le v_{los} sono le velocità relative delle **Stelle** rispetto al **Sole** lungo le direzioni delle N **Stelle**. In altri termini la somma quadratica delle quantità in parentesi è un indice della velocità del gruppo di **Stelle** considerato rispetto al **LSR**, nel senso che se il gruppo di **Stelle** ha velocità perfettamente distribuite a caso nei dintorni del **Sole** questo valore tende a zero, mentre assume valori via via crescenti man mano che si considerino popolazioni stellari sempre più vecchie in cui l'Asymmetric Drift è ben evidente. Sulla base di queste considerazioni, se si graficano le componenti del moto solare ottenute per le varie popolazioni stellari in funzione del quadrato della funzione S , si hanno i grafici di **Figura 93** (Binney e Merrifield, 1998) in cui è possibile vedere che

l'andamento delle componenti U e W del moto solare sono praticamente costanti al variare di S^2 (come nel caso delle U e W in funzione dell'indice di colore $(B-V)$ viste in **Figura 91**), mentre per la componente V la velocità tende ad aumentare linearmente all'aumentare di S^2 . Estrapolando la retta che meglio approssima i punti del grafico si arriva al valore $S^2 = 0$ a cui corrisponde una velocità:

$$V_{\odot} = 5,2 \pm 0,6 \text{ Km/s}$$

mentre le altre due componenti hanno valori costanti indipendentemente da S^2 di :

$$U_{\odot} = 10,0 \pm 0,4 \text{ Km/s}$$

$$W_{\odot} = 7,2 \pm 0,4 \text{ Km/s}$$

Queste dovrebbero essere le vere componenti del moto solare indipendentemente dalla popolazione stellare considerata e quindi la vera velocità del **Sole** rispetto al **LSR**.

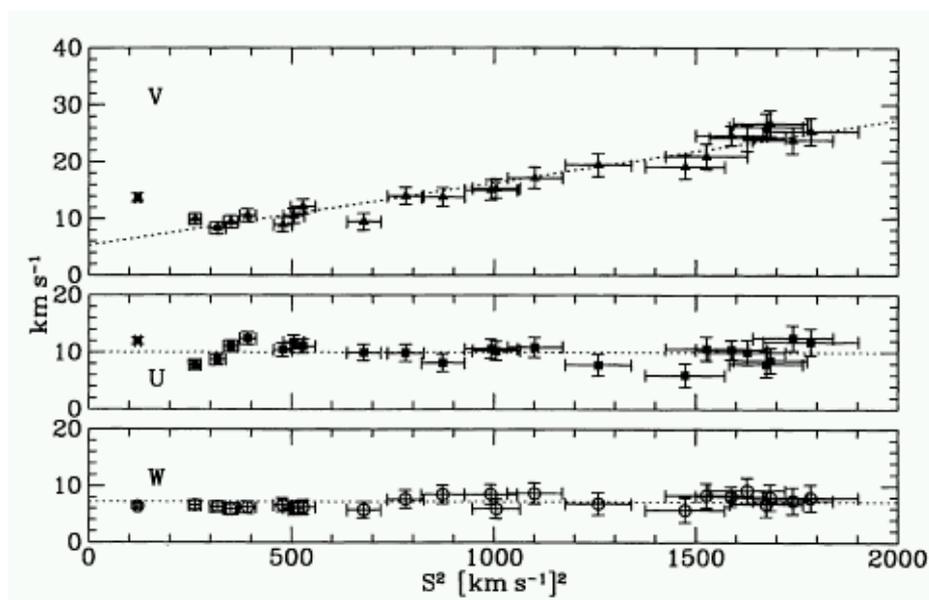


Fig. 93

Abbiamo appena visto che la componente W del moto solare è diretta perpendicolarmente al **Piano Galattico** verso il **NGP** con una velocità di circa **7,2 Km/s**. Questa componente di velocità ha portato il **Sole** nel corso di milioni di anni a posizionarsi sopra il **Piano Galattico** a circa qualche decina di **parsec**. Tuttavia l'altezza del **Sole** (h_z) dal piano non continuerà ad aumentare indefinitamente in quanto raggiungerà, probabilmente, tra circa 15 milioni di anni una altezza h_z massima di circa un centinaio di parsec, dopodichè il potenziale gravitazionale della **Galassia** tenderà a riportare il **Sole** verso il piano galattico. Quindi il **Sole** continuerà la sua corsa nell'emisfero **Sud Galattico** fino ad una altezza h_z negativa massima confrontabile con quella positiva appena vista, per poi ritornare nell'emisfero **Nord** con una altezza analoga. In questo caso si genera un moto oscillatorio verticale periodico di circa **70 milioni di anni**, a cui si associa il moto quasi circolare ed uniforme del **Sole**

intorno alla **Galassia** dando origine ad un moto sinusoidale simmetrico al piano della galassia come è possibile vedere sinteticamente in **Figura 94** (Bahcall J.N.,1985). Tuttavia il **Sole** attraversando il **Piano Galattico** periodicamente può venire deviato da grossi nubi di gas che dovrebbero contribuire a fargli aumentare l'ampiezza del suo moto di oscillazione.

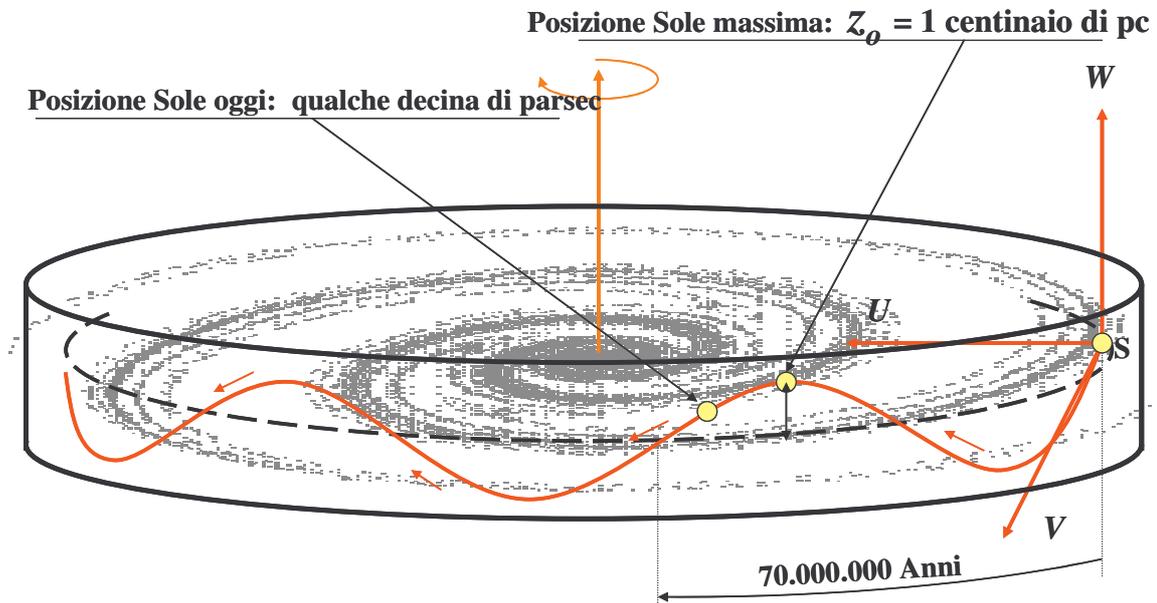


Fig. 94

Distribuzione della densità stellare

Nelle righe precedenti abbiamo visto come si muove il **Sole** rispetto al **LSR** e rispetto al centro galattico. Abbiamo anche visto come le **Stelle di Popolazione I** si muovono più velocemente intorno alla **Galassia** delle **Stelle di Popolazione II**. Tuttavia per avere una visione generale di come sono distribuite e come si muovono le varie popolazioni stellari pertinenti a diverse componenti principali della **Galassia** facciamo riferimento alla seguente **Tabella 7**. In questa **Tabella** oltre alle velocità tangenziali V_ϕ delle varie componenti galattiche sono riportate le dispersioni di velocità σ_v secondo la componente V_ϕ ed anche le distribuzioni di densità relativa delle varie componenti nei dintorni del **Sole**, nel senso che per **1000 Stelle** prossime a $z=0$ circa il **90%** appartiene al **Disco Sottile di Popolazione I**, mentre il **5÷10%** appartiene al **Disco Spesso** e solo lo **0,1%** appartiene all'**Alone**. Una visione ancor più completa sulla distribuzione di densità delle varie componenti in funzione dell'altezza h_z la possiamo avere analizzando la **Figura 95**

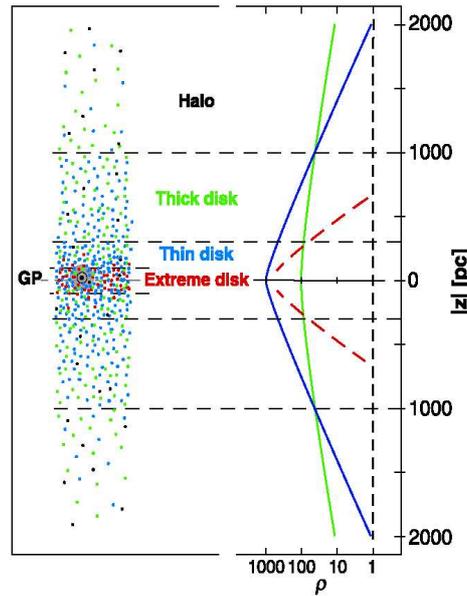


Fig. 95

La parte sinistra della **Figura 95** mostra una sezione perpendicolare al **Piano Galattico (GP)** nei dintorni del **Sole** (graficato con un piccolo cerchio) mentre i puntini diversamente colorati rappresentano le distribuzioni delle **Stelle** appartenenti alle diverse componenti principali. La densità di punti aventi lo stesso colore ci fornisce subito una valutazione qualitativa della densità di oggetti differenti a diverse altezze z dal **Piano Galattico**. Sul lato destro della figura invece abbiamo una situazione più analitica della precedente in quanto vengono riportate le distribuzioni medie di densità stellare in funzione dell'altezza z dal **Piano Galattico** per ogni componente stellare.

Da questo grafico si vede subito che le popolazioni stellari appartenenti al **Disco Estremo** (in rosso) e al **Disco Sottile** (in blu) hanno sul **Piano Galattico** la massima densità che tende a decrescere in maniera esponenziale man mano che ci si allontana dal **Piano Galattico** per raggiungere valori quasi nulli intorno a $z \approx \pm 700$ pc per le **Stelle** del **Disco Estremo** e valori quasi nulli a $z \approx \pm 2.000$ pc per **Stelle** di **Disco Sottile**. Situazione diversa per le **Stelle** di **Disco Spesso** in cui la massima densità è raggiunta sul **Piano Galattico** ma solo in ragione del 5÷10% di quella globale per poi decrescere a valori quasi nulli intorno a $z \approx \pm 5.000$ pc. La cosa interessante che si può notare dal grafico è che le curve del **Disco Spesso** (in verde) e quella del **Disco Sottile** (in rosso) si incontrano a $z \approx \pm 1.000$ pc

Tabella 7
Cinematica delle Componenti Principali della Galassia

Disco Sottile Pop. I Estr.(giovane)	$\langle V_\phi \rangle \approx 220$ Km/s	$\sigma_v \approx 10$ Km/s	$h_z \approx 150$ pc	
Disco Sottile Pop. I (vecchia)	$\langle V_\phi \rangle \approx 200$ Km/s	$\sigma_v \approx 30$ Km/s	$h_z \approx 300$ pc	$\rho \approx 90\%$
Disco Spesso Pop. II Intermedia	$\langle V_\phi \rangle \approx 150$ Km/s	$\sigma_v \approx 60$ Km/s	$h_z \approx 1.000$ pc	$\rho \approx 5-10\%$
Alone Pop. II Estrema	$\langle V_\phi \rangle \approx 0$ Km/s	$\sigma_v \approx 100-200$ Km/s	$r \approx$ decine di Kpc	$\rho \approx 0,1\%$

mostrando la medesima densità.

Come si era detto in precedenza il piano della **Galassia** è costituito dal **Disco Spesso** e dal **Disco Sottile**. Si era anche visto che alla distanza del **Sole** dal centro galattico le densità stellari decrescevano man mano che ci si allontanava dal **Piano Galattico**.

Tuttavia si è osservato che a parità di altezza h_z dal **Piano Galattico** la densità stellare tende a crescere man mano che ci si avvicina dalla periferia al centro della **Galassia** dove si trova il **Bulge** e il **Nucleo** che notoriamente hanno densità stellari molto elevate. Per quanto detto la densità stellare ρ dipenderà sia dalla distanza dal centro della **Galassia** e sia dall'altezza del gruppo di **Stelle** dal piano medio galattico secondo la seguente legge esponenziale.

$$\rho(R, z) = \rho_0 \cdot e^{-|z|/h_z} \cdot e^{-(R-R_0)/h_R}$$

dove ρ_0 indica la densità stellare, non intorno al **Sole** ma, sul piano medio galattico ($z=0$) alla distanza R_0 del **Sole** dal **centro galattico**, mentre z è l'altezza del gruppo stellare rispetto al piano medio galattico, R la distanza del gruppo dal centro galattico, h_z l'altezza verticale di scala del disco che per quello **Sottile** vale **250 parsec**, mentre per quello **Spesso** vale **1.000 parsec**. Infine h_R è la lunghezza di scala radiale che vale **3.500 parsec**.

Pertanto utilizzando questa legge esponenziale è possibile graficare zone della **Galassia** di eguale densità stellare come è possibile vedere nella **Figura 96** in cui le isodense sono graficate con linee punteggiate e differenti colorazioni (rosso brillante = alta densità, rosso cupo = bassa densità)

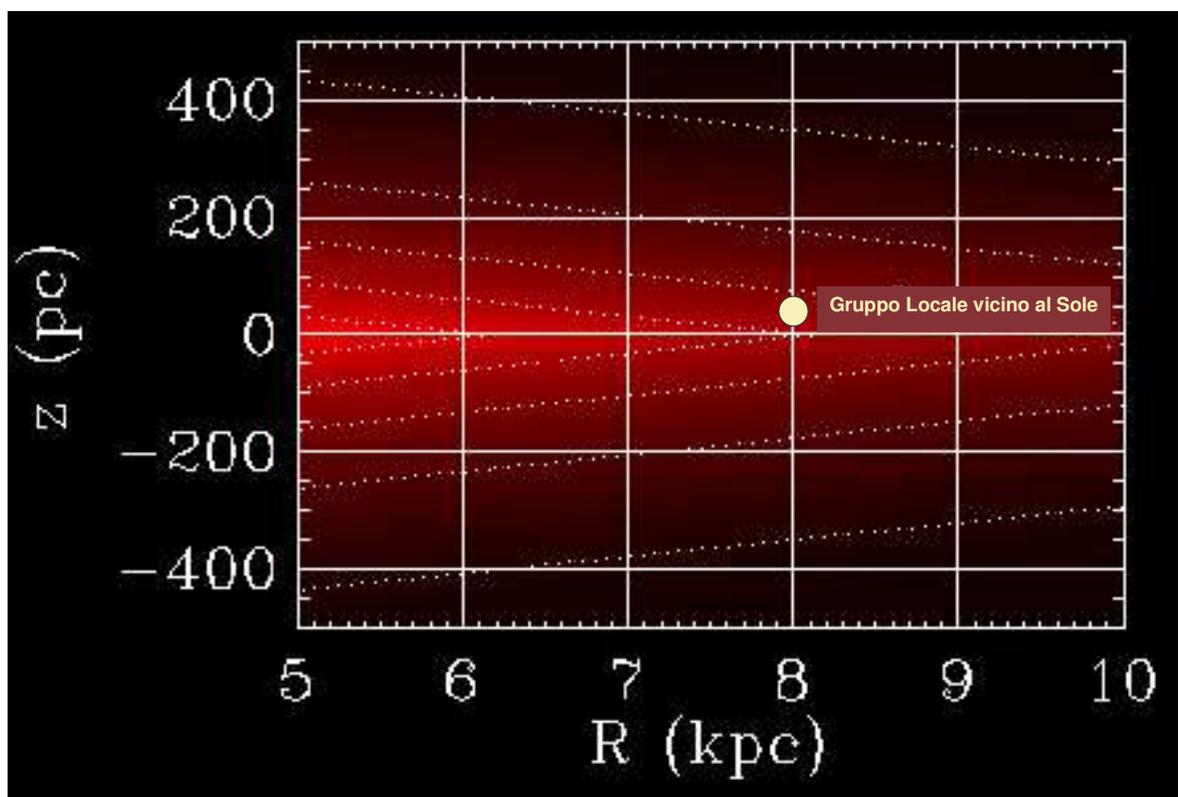


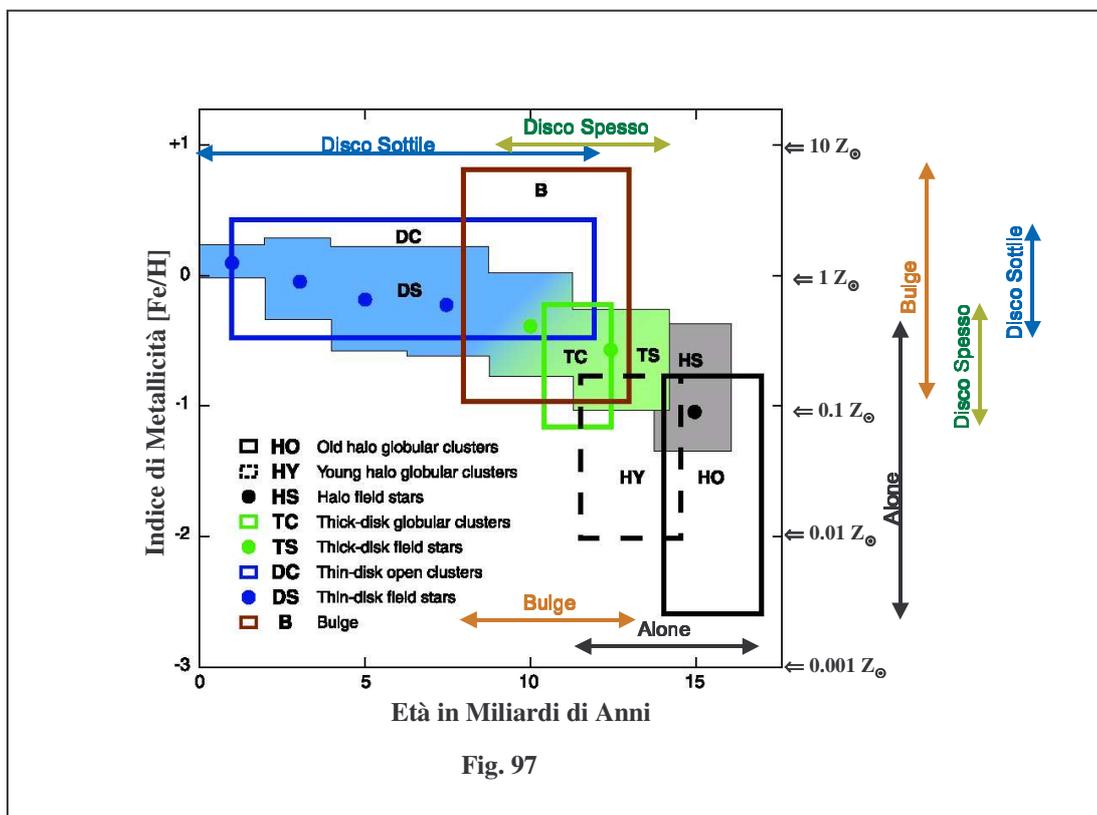
Fig. 96

Se dovessimo invece rappresentare la distribuzione di densità stellare per l'Alone e il Bulge bisogna ricorrere alla seguente legge di potenza :

$$\rho(R,z) = \rho_0 \cdot \left(\frac{R^2 + z^2 / \epsilon^2}{R_0^2} \right)^{-n/2}$$

dove ρ_0 al solito indica la densità stellare non intorno al Sole ma sul piano medio galattico ($z=0$) alla distanza R_0 del Sole dal centro galattico, mentre z è l'altezza del gruppo stellare rispetto al piano medio galattico, R la distanza del gruppo dal centro galattico, $\epsilon = c/a = 0,6 \div 0,8$ lo schiacciamento dello sferoide dell'Alone (c = raggio sferoide perpendicolare al Piano Galattico; a = raggio sferoide del Piano Galattico), $n = 2,5 \div 3,5$ coefficiente esponenziale. Il fatto che compaia ϵ^2 a denominatore di z^2 dipende dalla forma sferoidale dell'Alone per cui in senso verticale al Piano Galattico la densità stellare tende a decrescere più in fretta che nel caso in cui la simmetria fosse perfettamente sferica.

Un'altra statistica interessante è quella riportata in Figura 97 in cui sono graficate le abbondanze di metalli nelle varie componenti stellari in funzione della loro età. Le cose più interessanti che si riscontrano in questa Figura sono le distribuzioni degli Ammassi Aperti del Disco Sottile che pur mostrando metallicità abbastanza costanti di tipo solare hanno delle età che variano da circa un miliardo di anni fino a circa 12 miliardi di anni .



Le **Stelle di Campo** dello stesso **Disco** invece mostrano delle metallicità tendenzialmente decrescenti con l'età e più basse di quella solare, ma comunque spaziano sempre su di un grande intervallo di età (da pochi **milioni di anni a circa 10 miliardi di anni**). Molto più ristretta è la zona del grafico occupata dagli **Ammassi Globulari** e dalle **Stelle di Campo del Disco Spesso** in cui si osservano oggetti con metallicità più bassa di quella solare ma con età simili tra di loro (confinata tra i **10 e i 14 miliardi di anni**). Situazione diametralmente opposta per gli **Ammassi Globulari e le Stelle di Campo dell'Alone** che avendo intervalli di età ristretti e centrati sui **15 miliardi di anni** mostrano degli intervalli di metallicità molto ampi ma con valori molto bassi (da **1/10 a un millesimo** di quella solare).

Con età leggermente più giovani (intorno ai **12 miliardi di anni**) ma metallicità comparabili troviamo anche altri **Ammassi Globulari nell'Alone**. Infine le **Stelle del Bulge** mostrano metallicità variegata che vanno da **1/10 a circa 10 volte** quella solare con età medio vecchie comprese tra **8 e 13 miliardi di anni**.

Rotazione Galattica

Abbiamo visto che tutte le **Stelle** della **Galassia** ruotano intorno al centro galattico con velocità diverse a seconda della loro posizione rispetto al centro. Poiché il moto delle **Stelle** è governato dalla **Legge di Gravitazione Universale**, si potrebbe pensare di applicare le leggi del moto planetario di **Keplero** anche a questi oggetti celesti. In realtà queste leggi andrebbero bene se tutta o quasi la massa della **Galassia** fosse concentrata nella sua zona centrale, così come avviene per il nostro sistema solare in cui la massa preponderante è concentrata nel **Sole** al centro del sistema. Purtroppo la massa della **Galassia** non è tutta concentrata nel suo centro ma è distribuita con densità molto meno decrescenti dal centro verso la periferia di quella del sistema solare. Pertanto, per risolvere il problema della rotazione galattica occorre introdurre alcune approssimazioni, considerando cioè la distribuzione della massa per due regioni distinte:

- **Regioni Interne (Bulge)**
- **Regioni Periferiche (Disco)**

Regioni Interne (Bulge). Pur valendo sempre la Legge di Gravitazione Universale la massa in questa zona è distribuita in maniera praticamente uniforme e di conseguenza la forza di gravità esercitata su di una **Stella** dipende dalla somma delle forze di tutte le altre **Stelle** sparse all'interno di questa regione.

In altri termini, come si può dimostrare, una stella all'interno del Bulge è soggetta ad una forza gravitazionale che dipende solo dalla massa delle stelle che stanno all'interno della sfera di raggio equivalente alla distanza della stella dal centro della galassia, mentre la forza gravitazionale sulla stella esercitata dal guscio di stelle del Bulge esterne a questa sfera, è praticamente nulla. Quindi la massa da prendere in considerazione per una stella a distanza **R** dal centro, immersa nella sfera del **Bulge** con densità ρ , praticamente uniforme, sarà solo quella contenuta nella sfera di raggio **R** secondo la relazione:

$$M = V \cdot \rho = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho$$

ma per la relazione che lega la Forza di Gravità a quella Centrifuga si ha:

$$G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot \frac{V^2}{R}$$

dove m rappresenta la massa della **Stella**, M la massa di tutte le **Stelle** entro la sfera di raggio R e G la costante di gravità . Dopo aver sostituito la relazione precedente in questa ed eliminato m si ottiene:

$$G \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{R^3}{R^2} \cdot \rho = \frac{V^2}{R}$$

Ponendo ω^2 uguale a:

$$\omega^2 = G \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \rho$$

questa quantità risulta costante in quanto tutti i termini in esso contenuti sono costanti. Quindi dopo alcune semplificazioni si arriva alla seguente formulazione:

$$V = \omega \cdot R$$

Ovviamente questa relazione vale solo per valori di R interni alla regione sferica del Bulge in cui si è supposta una densità uniforme di masse stellari.

In più questa relazione ci dice che per quanto concerne la parte più interna della **Galassia** (il **Bulge**) le velocità delle **Stelle** sono direttamente proporzionali alle loro distanze R , il che equivale a dire che le **Stelle** girano intorno al centro con velocità angolari ω costanti come se fossero un corpo rigido unico.

Regioni Periferiche (Disco). Per quanto riguarda questa regione dove le densità stellari sono molto esigue, si può ragionevolmente assumere che la maggior parte della massa sia concentrata nel **Bulge** , per cui le **Stelle** delle regioni periferiche dovrebbero seguire le stesse leggi di **Keplero** valide per i pianeti del nostro sistema solare. Con tali assunzioni ricordando l'eguaglianza tra la forza centrifuga e quella gravitazionale :

$$G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot \frac{V^2}{R}$$

dopo opportune semplificazioni diventa:

$$V = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}}$$

dove in questo caso M è la massa dell'intero **Bulge** ed R la distanza di una generica **Stella** della **Regione Periferica** dal centro. In questo caso si vede che la velocità di rivoluzione di una **Stella** periferica è inversamente proporzionale alla radice quadrata della distanza dal centro, poiché il numeratore sotto radice è costante.

Osservativamente la velocità di rotazione della **Galassia** è stata ottenuta in parte dall'analisi delle velocità radiali relative e dei moti propri relativi delle **Stelle** vicine al **Sole**, ma la determinazione più attendibile ci è stata fornita dalle osservazioni di velocità radiali ottenute dallo spostamento **Doppler** della riga, nella banda radio dei **21 cm**, delle nubi di Idrogeno neutro (**Regioni H-I**) sparse nella

Galassia a diverse distanze da noi e a differenti longitudini galattiche.

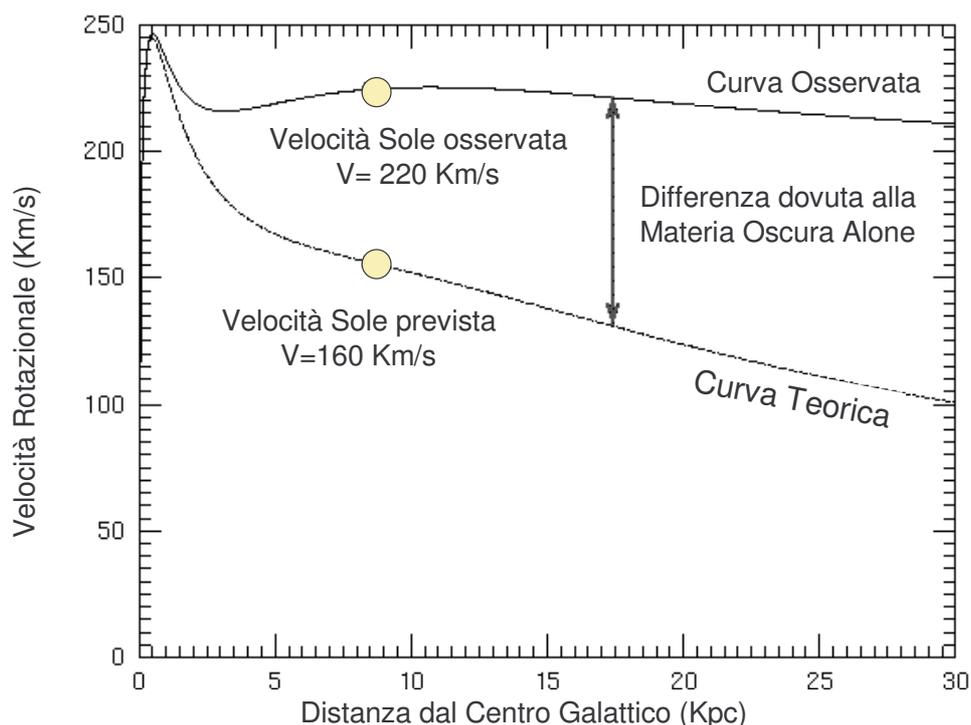


Fig. 98

I dati forniti dalle osservazioni mostrano un andamento lineare crescente dal centro della **Galassia** fino a **1-2 Kparsec** dal centro galattico, in accordo con la teoria vista in precedenza. Tuttavia raggiunto il punto di “**turnover**” intorno ai **250 Km/s**, dopo una leggera discesa per altri **2-3 parsec**, la velocità si stabilizza intorno ai **220 Km/s** con un andamento quasi costante fino alle regioni periferiche della **Galassia** (vedi **Figura 98**). Se applicassimo le considerazioni viste prima per le **Regioni Periferiche** dovremmo aspettarci dal punto di “**turnover**” in poi un andamento esponenziale decrescente delle velocità che alla distanza del **Sole** dal centro galattico si attesterebbe intorno ai **160 Km/s**, valore decisamente basso rispetto ai **220 Km/s** calcolati con i dati osservativi (vedi **Figura 98**).

Una delle possibili spiegazioni dell’andamento piatto della curva di velocità galattica per le regioni periferiche è da attribuire alla probabile presenza di una ingente quantità di massa **nell’Alone Oscuro o Corona** che circonda la nostra **Galassia**.

Ricordiamo che l’**Alone Oscuro o Corona** è una delle regioni della **Galassia** poco conosciuta, in quanto la materia in essa contenuta non è visibile nelle usuali bande elettromagnetiche. La composizione del materiale presente in questa zona della **Galassia** sembra sia costituita da materiale barionico, cioè da **Stelle** nane bianche e brune, **Stelle** di neutroni, buchi neri, Macho (oggetti compatti massicci dell’**Alone** di massa gioviana), ecc., e da particelle non barioniche come neutrini, **Wimp** (particelle 100 volte più massicce del protone ad interazione debole con la materia), **Assioni** (particelle con una massa inferiore al milionesimo di quella dell’elettrone e velocità di circa **300 Km/s**), ecc. Sulla base della curva di rotazione galattica si è stimato che la massa presente in tutta la **Galassia** ammonti a circa **10¹² masse solari** e che solo il **10 %** di questa sia visibile e concentrata prevalentemente nel disco galattico.

Un comportamento analogo di rotazione è stato evidenziato anche in centinaia di altre galassie a

spirale, sempre con osservazioni radio e spettroscopiche, come è possibile vedere nell'esempio di **Figura 99** in cui è riportata la velocità di rotazione galattica per varie distanze dal centro della **Galassia** a spirale **NGC 6503** nella costellazione del Drago. In questa **Figura** sono anche riportate le probabili curve di velocità dovute alle singole componenti galattiche. Come è possibile vedere il massimo contributo di velocità viene dagli oggetti presenti nell'**Alone Oscuro** il che lascia supporre l'esistenza di grandi masse non visibili come accennato poco fa. Comunque sia allo stato attuale nulla si può dire di concreto circa la natura di questa massa oscura in quanto le prove sperimentali non sono ancora sufficienti e pienamente attendibili.

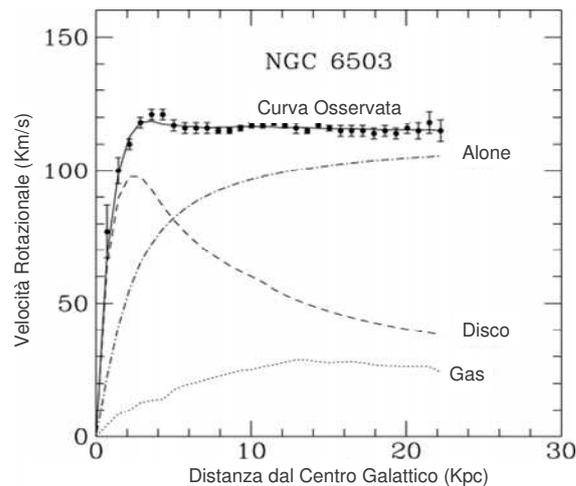


Fig. 99

Il Mezzo Interstellare

Quando si parla di **Mezzo Interstellare** ci si riferisce alla materia presente in quella porzione di spazio esistente tra una **Stella** e l'altra. Contrariamente a quanto si potrebbe pensare questo spazio non è vuoto ma è occupato da **Gas**, **Polveri**, **Campi Magnetici** e **Particelle Cariche**.

Circa il **99%** del mezzo interstellare è costituito da **gas** mentre solo l'**1%** è rappresentato da **polveri**. Tuttavia la massa totale di **gas** e **polveri** rappresenta solo il **15%** della massa visibile della nostra **Galassia**.

Il Gas nel Mezzo Interstellare

Il costituente essenziale del gas interstellare è l'Idrogeno, presente sia allo stato neutro che ionizzato o in forma molecolare per circa il **90%** dell'intera massa gassosa, mentre solo il **9,99%** è rappresentato da atomi di Elio e da qualche traccia (**0,01%**) di elementi più pesanti (comunemente chiamati metalli).

Il gas di Idrogeno, come è stato accennato, può trovarsi sotto forma atomica o molecolare in **Nubi Fredde e Calde**.

Le **Nubi Calde** sono presenti in prossimità di **Stelle** giovani molto calde le quali eccitano gli atomi di idrogeno della nube ionizzandoli (**temperatura di 10.000°K**) facendo assumere alla nube stessa una colorazione rossastra come nel caso della **Nebulosa Rosetta** o quella di **Orione (Regioni H-II)**.

Le **Nubi Fredde** sono costituite da **atomi di Idrogeno neutro** (densità di **10 - 100 atomi/cm³**) e data la loro bassa temperatura (**circa 100°K**) sono visibili solo nella banda radio dei **21 cm**. Queste nubi sono i costituenti fondamentali per la formazione stellare alla condizione che nella nube si inneschi un processo di collasso gravitazionale. Si pensa che la massa di idrogeno neutro sparso per la **Galassia (Regioni H-I)** ammonti a circa **3 ÷ 5 miliardi di masse solari**.

Esiste anche un altro tipo di **Nubi Fredde** costituite da **molecole di Idrogeno** a bassa temperatura (**circa 10°-30° K**) con una densità più alta delle precedenti nubi (**1000 molecole/cm³**) e con la presenza di polveri o altri elementi più pesanti. Questo tipo di nubi vengono chiamate **Nubi Molecolari** e sono presenti soprattutto nei bracci a spirale e verso il centro galattico. La massa totale di queste nubi molecolari è stata stimata essere pari al **25% ÷ 100%** della massa delle **Regioni H-I**.

Le Polveri nel Mezzo Interstellare

Se osserviamo con attenzione il cielo possiamo vedere che in ristrette zone della volta **Celeste** non ci sono **Stelle** (vedi **Figura 100** in cui è riportata la foto della “**Nube Nera**” **B68** osservata con il telescopio **ESO VLT ANTU** di **8,2 mt di Cerro Paranal – Cile**). Questo fatto ha indotto alcuni astronomi del passato a credere che tali zone fossero dei tunnel che attraversavano la **Galassia**, entro i quali si potessero osservare gli oggetti extragalattici .

Solo nel **1930** con **Robert Trumpler** si ebbe la conferma sperimentale che questi “buchi” nel cielo altri non fossero che delle enormi nubi di polvere che si interponevano tra noi e le **Stelle** di sfondo. L’esperimento condotto da **Trumpler**, per confermare l’esistenza di queste masse di polvere nello spazio, consistette nell’osservazione di circa un centinaio di **Ammassi Aperti** con il telescopio di Mount Wilson. Di questi **Ammassi** misurò diversi parametri quali:

La dimensione angolare media dell’Ammasso

Il grado di concentrazione della parte centrale dell’Ammasso

Il numero globale di Stelle in esso contenuto

La luminosità e la classe spettrale delle sue Stelle

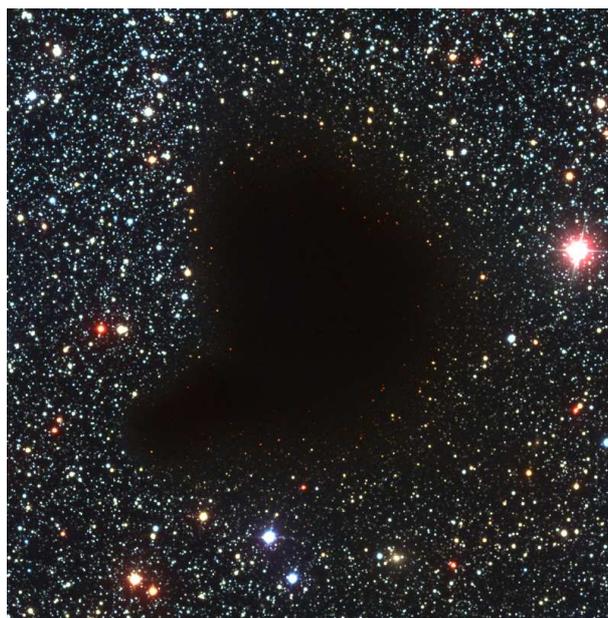


Fig. 100

Tramite questi elementi calcolò con due differenti metodi la distanza degli **Ammassi**. Per prima cosa suddivise gli **Ammassi** in tanti gruppi, selezionati per numero di **Stelle** e per grado di concentrazione. Inoltre fece l'assunzione che **Ammassi** aventi all'incirca lo stesso numero di **Stelle** e lo stesso grado di concentrazione, dovessero avere le stesse dimensioni fisiche. Sulla base di tale assunzione egli riuscì a stimare la distanza di tutti gli **Ammassi** basandosi esclusivamente sulla loro separazione angolare, una volta conosciuta almeno una distanza fisica di ogni gruppo di Ammassi ottenuta con altri metodi. **Trumpler** chiamò questo primo metodo con il nome di “**Distanza Diametro**”.

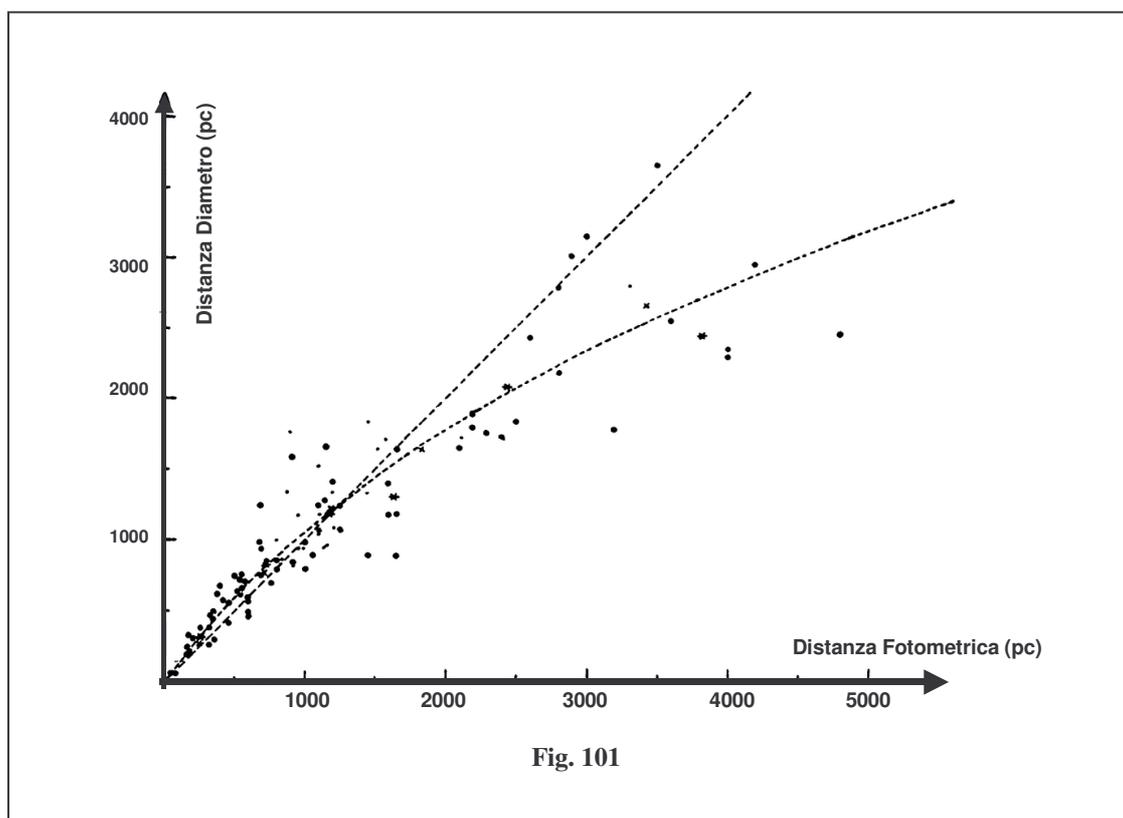
Il secondo metodo consistette nel valutare la distanza degli **Ammassi** sulla base dei parametri fotometrici e spettroscopici delle **Stelle** in essi contenuti.

Per far questo **Trumpler** osservò la **Magnitudine Apparente** delle **Stelle** di ogni **Ammasso** e di queste ne determinò anche il tipo spettrale. Pertanto dalla conoscenza del tipo spettrale delle **Stelle** e quindi della loro **Magnitudine Assoluta M** , nonché della loro **Magnitudine Apparente m** , egli fu in grado di calcolarsi la distanza **d** delle **Stelle** tramite la nota relazione del **Modulo di Distanza**:

$$M - m = 5 - 5 \cdot \log(d)$$

Dalla media delle distanze delle **Stelle** di ogni **Ammasso** ottenute con questo metodo si ricavò verosimilmente la distanza di questi gruppi stellari che chiamò “**Distanza Fotometrica**”.

Graficando i due tipi di distanza descritti poc'anzi **Trumpler** avrebbe dovuto ottenere una distribuzione di punti giacente approssimativamente su di una retta inclinata di **45°** rispetto agli assi del grafico. Invece ottenne un grafico come quello riportato in **Figura 101** in cui si evidenzia un incurvamento dei punti verso l'asse delle ascisse con il crescere della **Distanza Fotometrica**.



Questo incurvamento, assumendo corretto il metodo “**Distanza Diametro**”, fu attribuito al “**Metodo Fotometrico**” poiché l’esistenza di polveri interposte davanti agli **Ammassi** non avrebbe modificato il tipo spettrale osservato ma sicuramente avrebbe modificato la **Magnitudine Apparente** aumentandola, nel senso che la luminosità delle **Stelle d’Ammasso** sarebbe stata attenuata dalle polveri, inducendo una sovrastima della distanza. Questo grafico fece inoltre capire che l’attenuazione della luce stellare cresceva con la distanza la qual cosa confermava che lo spazio interstellare non era vuoto ma costituito anche da un mezzo assorbente oscuro e freddo come la polvere.

Le polveri dello spazio interstellare sono assimilabili a dei grani di forma vagamente ellissoidale con dimensioni dell’ordine del micron (vedi **Figura 102** in cui è rappresentato un grano di polvere interstellare prelevato da un aereo in alta quota). La parte centrale del grano è costituita prevalentemente da Silicio e da Carbonio sotto forma di grafite, mentre la parte esterna è rivestita da un sottile mantello di ghiaccio d’acqua. Questi grani sono generalmente prodotti nelle atmosfere fredde delle **Stelle** giganti rosse o dai resti di esplosioni delle supernovae .

La massa di queste particelle é molto più elevata di quella del gas. Infatti il gas presente nello spazio è costituito da pochi atomi mentre i grani di polveri sono costituiti da milioni o miliardi di atomi. Anche se ci sono nello spazio solo 1000 particelle di polvere per Km^3 , il rapporto tra le parti di gas e le parti di polvere, rapportate alla densità della nostra atmosfera terrestre, che è 10^{21} volte maggiore di quella dello spazio, sarebbero sufficienti a creare una fitta nebbia che ridurrebbe la visibilità a **solo 1 metro!** Quando la luce di una **Stella** attraversa una nube di polveri e gas questa subisce il fenomeno che va sotto il nome di **Estinzione Interstellare**. Tale fenomeno in realtà è costituito dalla somma di più fenomeni che hanno tutti la caratteristica di attenuare l’energia luminosa che attraversa la nube e che sono:

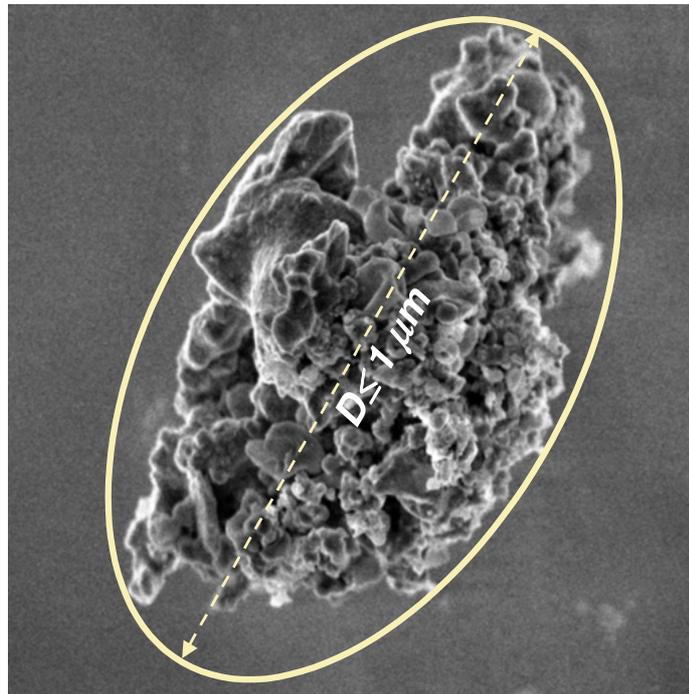


Fig. 102

lo Scattering (o deviazione della luce incidente)
l’Assorbimento
la Polarizzazione

Lo **Scattering** è quel fenomeno per cui un raggio di luce incidente su di un grano di polvere o di una molecola di gas viene deviato secondo un'altra direzione rispetto a quella originale.

Se la luce visibile colpisce una molecola di gas, la sua radiazione viene deviata con una probabilità che è inversamente proporzionale alla quarta potenza della lunghezza d'onda incidente secondo la relazione di **Rayleigh** che semplificata può scriversi:

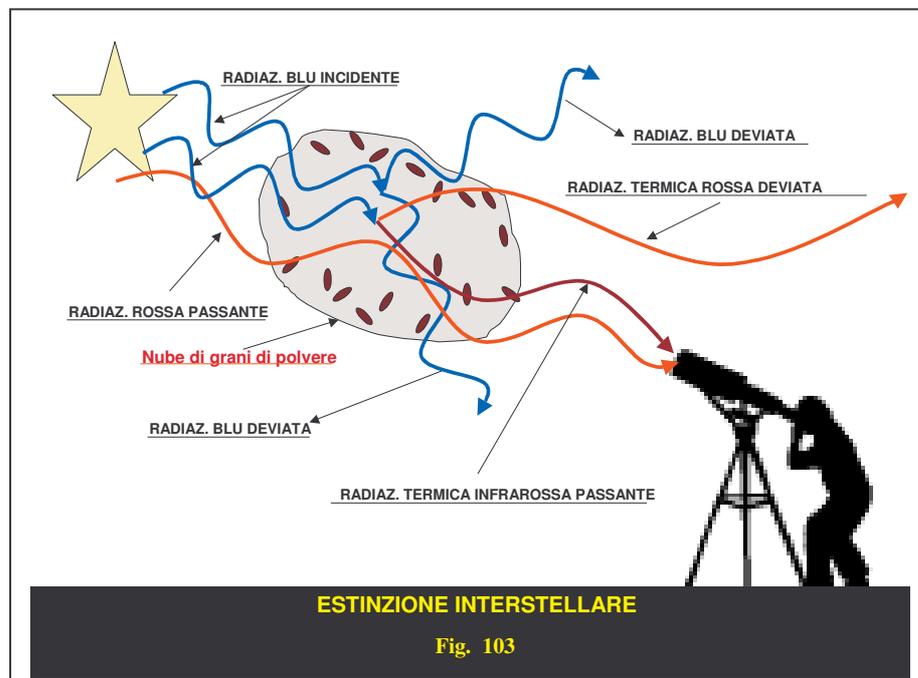
$$P \propto \frac{1}{\lambda^4}$$

in quanto essendo le dimensioni di una molecola di gas molto piccole (inferiore al nanometro) rispetto alla luce visibile incidente (compresa tra 380 e 720 nanometri) questa viene deviata maggiormente nella componente blu rispetto a quella rossa di un fattore circa 10 volte superiore.

Viceversa se la luce colpisce un grano di polvere che ha dimensioni (da 100 a 1000 nanometri) paragonabili a quelli della lunghezza d'onda della luce questa viene deviata pesantemente nella stessa maniera per quasi tutte le lunghezze d'onda in quanto la probabilità di scattering dipende solo dall'inverso della lunghezza d'onda secondo la relazione:

$$P \propto \frac{1}{\lambda}$$

Da questa relazione si vede che la probabilità di scattering aumenta anche in questo caso con il diminuire della lunghezza d'onda, ma la radiazione blu sarà deviata più di quella rossa solo per un fattore 2, per cui l'osservatore guardando la luce attraverso la nube la vedrà attenuata (poiché la parte



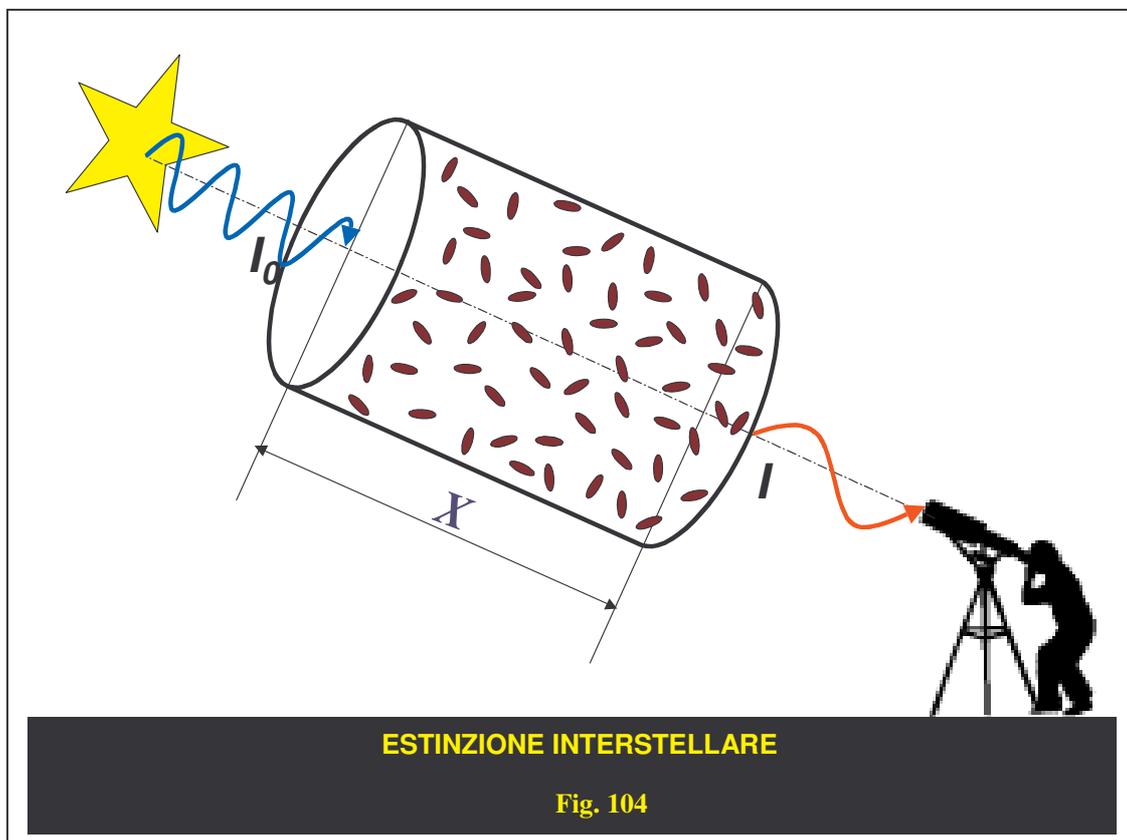
blu è andata dispersa in altre direzioni) ma anche con una colorazione più rossa di quella reale incidente sulla nube (vedi **Figura 103**), in quanto questa passa praticamente indenne attraverso la nube, salvo l'attenuazione prodotta dalla presenza del gas.

L'Assorbimento invece è quel fenomeno per cui quando della radiazione incide su atomi di gas questi si eccitano collidendo con altri atomi in maniera super elastica prima di rimettere i fotoni, per cui parte della radiazione incidente viene convertita in energia cinetica con un conseguente assorbimento di parte dei fotoni emessi inizialmente.

Supponiamo ora che il fenomeno predominante sia l'Assorbimento senza Scattering e che l'intensità incidente su atomi di gas sia I_0 . Quando la radiazione alla frequenza ν attraverserà uno strato di gas di spessore dx . questo indurrà una variazione negativa dell'intensità luminosa dI . Il Coefficiente lineare di Assorbimento α sarà definito come:

$$-\frac{dI_\nu}{I_\nu} = \alpha(\nu) \cdot dx$$

Integrando questa equazione differenziale per una distanza finita X avremo che l'intensità I all'uscita della nube sarà (vedi Figura 104):



$$I = I_0 \cdot e^{-\int_0^X \alpha \cdot dx}$$

Assumendo α costante per tutta l'estensione della nube si ha :

$$I = I_0 \cdot e^{-\alpha \cdot X}$$

Se con $\alpha_a = \alpha/n$ chiamiamo il **Coefficiente di Assorbimento Atomico**, dove n è il numero di atomi per unità di volume la precedente relazione diventa:

$$I = I_0 \cdot e^{-\alpha_a \cdot n \cdot X}$$

Poiché in una nube di gas ci sono anche le polveri che generano la deviazione della radiazione incidente e che quindi portano ad una attenuazione della luce, si può usare un'equazione analoga alla precedente in cui si sostituisce il coefficiente di assorbimento α_a con quello di scattering α_s .

Pertanto l'**Estinzione** finale sarà costituita da entrambi i fenomeni di **Assorbimento e di Scattering** e il **Coefficiente di Estinzione Globale K** sarà dato dalla somma dei due coefficienti precedenti secondo la relazione:

$$K = (\alpha_a + \alpha_s) \cdot n$$

Quindi l'**Estinzione** finale sarà:

$$I = I_0 \cdot e^{-K \cdot X}$$

passando dalle intensità alle magnitudini si ha:

$$m - m_0 = -2,5 \cdot \log \frac{I}{I_0} = -2,5 \cdot \log_{10} e^{-K \cdot X} = 1,0857 \cdot K \cdot X$$

Se chiamiamo a_v la differenza di magnitudine $m - m_0$ la nota relazione del **Modulo di Distanza** dovrà essere corretta del termine a_v nel seguente modo, affinché sia attendibile per la valutazione della distanza fotometrica delle **Stelle**:

$$M - m = 5 - 5 \cdot \log(d) - a_v$$

Associato all'**Assorbimento** e allo **Scattering** abbiamo l'effetto che va sotto il nome di **Arrossamento o Reddening**. Questo fenomeno dipende, come si è visto precedentemente, dal fatto che i grani di polvere deviano maggiormente la radiazione blu lasciando passare quella rossa, per cui l'effetto finale è che le **Stelle** sembrano più rosse di quello che in realtà sono. Per questo fatto l'**Indice di Colore (B-V)** osservato sarà più rosso (e quindi più grande) di quello reale che solitamente viene indicato come $(B-V)_0$. Pertanto definiamo l'**Arrossamento** mediante l'equazione:

$$E(B - V) = (B - V) - (B - V)_0$$

Un importante risultato che si è ottenuto dalle osservazioni è che l'**Arrossamento Stellare** (nella banda visuale V) è legato direttamente all'**Estinzione Stellare** dalla seguente relazione:

$$a_V = 3,2 \cdot E(B - V)$$

Quindi se noi conosciamo l'ammontare dell'**Arrossamento** sappiamo anche quanto ammonta l'**Estinzione** e di conseguenza possiamo correggere l'equazione del **Modulo di Distanza**.

Un fenomeno collaterale dell'**Estinzione** è dato dall'**Assorbimento** della radiazione nell'ottico e nell'ultravioletto da parte di particelle di polvere della luce che fortemente eccitate si riscaldano emettendo a loro volta nella banda infrarossa e radio contribuendo ad attenuare l'intensità della luce incidente sulla nube.

Un ultimo fenomeno che attenua la radiazione della luce è la **Polarizzazione**. I grani di polvere essendo vagamente ellissoidali in opportune condizioni possono mettersi in rotazione. In questo caso l'asse maggiore tende a disporsi perpendicolarmente al campo magnetico che permea la nostra **Galassia**. Pertanto viene preferenzialmente assorbita la luce con polarizzazione allineata ai grani e quindi perpendicolarmente al campo magnetico.

Conteggi Stellari

Per capire come è fatta la nostra **Galassia** dobbiamo avere a disposizione una serie di dati che ci permettano di sapere dove siano collocate le **Stelle**, a che distanza si trovino da noi o dal centro della **Galassia**, quali siano le densità di questi oggetti nelle diverse posizioni dello spazio, quali le loro luminosità intrinseche e quali le loro composizioni chimiche, età e caratteristiche cinematiche.

Il primo parametro fondamentale che occorre conoscere è la distanza delle **Stelle**. Purtroppo questo parametro è determinabile con una certa precisione solo per poche **Stelle** nelle vicinanze del **Sole**, diciamo entro una sfera di un centinaio di parsec di raggio, tramite il metodo della **Parallasse Trigonometrica**, di cui la missione spaziale **HIPPARCOS** ha fornito agli inizi degli anni '90 le migliori distanze ad oggi note. Se si volesse andare più in profondità nello spazio dovremmo accontentarci della luminosità apparente delle **Stelle** che combinata con il tipo spettrale fornisce la distanza di questi oggetti per via fotometrica tramite la relazione del **Modulo di Distanza**, più volte citata. Tuttavia questo metodo è meno preciso del precedente in quanto le **Magnitudini Apparenti e Assolute** hanno un certo grado di imprecisione che si ripercuote sulla stima della distanza in maniera più marcata del metodo trigonometrico. Inoltre a rendere meno attendibile questo metodo si aggiunge anche l'**Assorbimento Interstellare** che, soprattutto in prossimità del **Piano Galattico**, altera sistematicamente le **Magnitudini Apparenti**. Con tale metodo si riescono a stimare distanze entro il **Kparsec** per **Stelle** del **Piano Galattico**, di tipo spettrale vicino a quello solare. Per **Stelle** più brillanti (tipo **B**) la distanza può raggiungere i **2,5 Kparsec**. Migliore la situazione in direzione perpendicolare al **Piano Galattico** in cui l'**Assorbimento Interstellare** essendo decisamente contenuto consente di stimare distanze fino a circa **2 Kparsec** per **Stelle** intrinsecamente brillanti come le nane di tipo **A** e le giganti **G** e **K**. Per le **Stelle** intrinsecamente deboli come le nane **K** la distanza fotometrica resta entro i **200 parsec**. Distanze attendibili, confrontabili con le dimensioni della **Galassia** (decine di **Kparsec**) sono stimabili dall'osservazione delle brillanti **RR Lyrae** dello sferoide che, grazie al loro rigoroso periodo di variabilità, proporzionale alla luminosità intrinseca, permettono di ottenere risultati accurati anche per oggetti ai limiti di osservabilità dei telescopi. Infine l'osservazione degli **Ammassi Globulari** permette di determinare distanze su larga scala per tutta la **Galassia**.

Avendo fatto questa premessa sulle distanze delle **Stelle** vediamo di descrivere ora la distribuzione delle medesime o quello che in altri termini va sotto il nome di **Conteggi Stellari**.

Supponiamo che la **Distribuzione di Densità $A(m,b)$** corrisponda al numero di **Stelle di Magnitudine Apparente m** per un intervallo unitario di magnitudine, coprente un'area unitaria di cielo ad una generica latitudine galattica **b** . All'atto pratico con questa funzione si sta ad indicare il numero di **Stelle di magnitudine $m \pm 0,5$ mag** contenute entro una piramide (o un solido di volume equivalente) con vertice nel Sole e base **S** (sulla sfera **Celeste**) uguale a 1 grado quadrato, posta alla latitudine galattica **b** (vedi **Figura 105**).

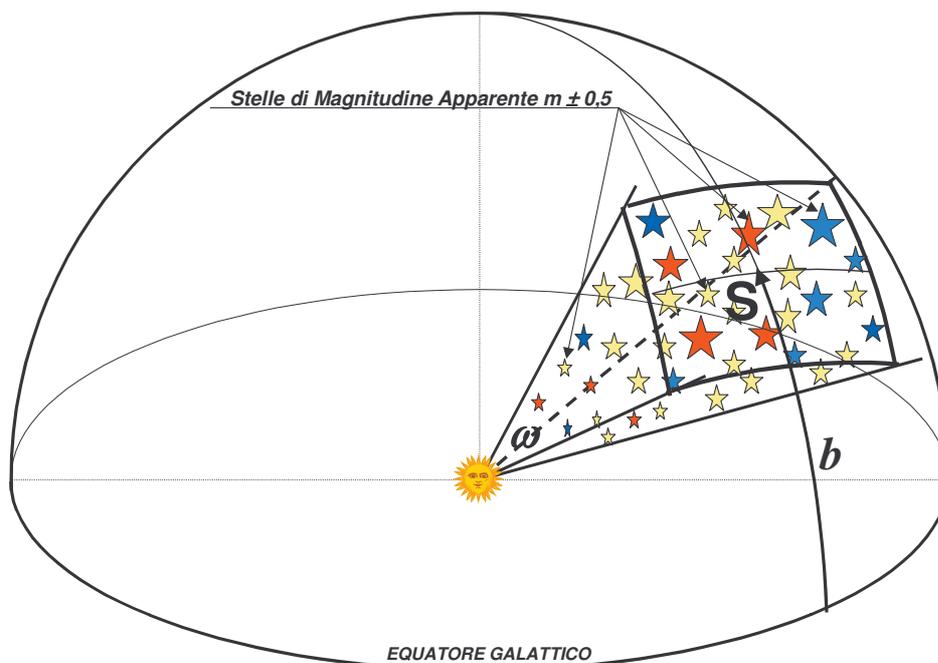


Fig. 105

Se consideriamo invece un intervallo infinitesimo di magnitudine **dm** la funzione seguente:

$$A(m,b) dm$$

rappresenta il numero di **Stelle** presenti nella piramide vista in **Figura 105** contenente però **Stelle** di magnitudine tra la **m** e la **$m+dm$** .

Un risultato quantitativo di quanto sopra esposto è riportato in **Figura 106** in cui è rappresentata la distribuzione dei conteggi stellari per grado quadrato di cielo di **Stelle con Magnitudini Fotografiche** comprese tra **$m_{pg} \pm 0,5$ mag** appartenenti al **Piano Galattico ($b=0^\circ$)** e al **Polo Nord Galattico ($b=90^\circ$)**. Ricordiamo, in questo caso, che quando si parla di conteggi per una certa latitudine galattica intendiamo i valori ottenuti come media dei conteggi di tutte le aree di cielo unitarie sparse su tutte le longitudini galattiche relative alla latitudine **b** .

Come è possibile constatare dalla **Figura 106** il conteggio di **Stelle** fino alla **Magnitudine Apparente $m_{pg} \approx 8$** non differisce molto tra il **Piano** e il **Polo Galattico**, anche se si nota un maggior numero di oggetti sul piano. Situazione completamente differente per le magnitudini superiori alla **$m_{pg} \approx 8$** in cui si vede che il divario esistente tra i conteggi del **Piano Galattico** con quello del **Polo** diventa sempre più marcato verso gli oggetti estremamente deboli. Da altre considerazioni sulla distribuzione

dei conteggi si è messo in evidenza che il maggior contributo in luminosità per le regioni del **Polo Galattico** viene dato da **Stelle** brillanti di **Magnitudine Apparente 8**, mentre il maggior contributo per le regioni del **Piano Galattico** è dato dalle moltissime **Stelle** di magnitudine intorno alla **14-esima** che conferiscono alla **Via Lattea** il classico aspetto lattiginoso (Allen, C.W. 1973).

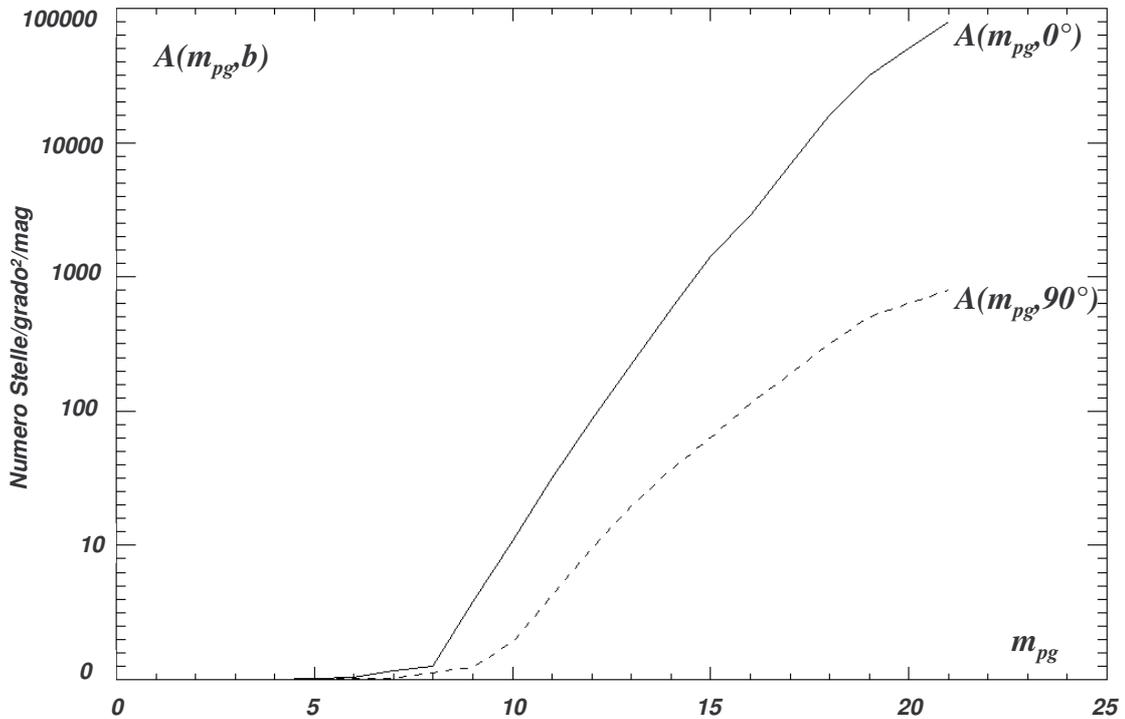


Fig. 106

Abbiamo visto prima che il numero di **Stelle** per grado quadrato di magnitudine **m** può essere scritto in forma differenziale. Integrando su tutte le **Magnitudini Apparenti** o fino ad una certa magnitudine limite **m_{lim}** si ha il numero totale di conteggi di **Stelle** per grado quadrato su tutte le magnitudini (o fino alla **m_{lim}**) secondo la relazione:

$$N(m_{lim}, b) = \int_{-\infty}^{m_{lim}} A(m', b) \cdot dm'$$

Poiché nella pratica si ha a che fare con magnitudini discrete la relazione precedente può trasformarsi nella sommatoria di tanti gruppi di conteggi di **Stelle** per grado quadrato aventi intervalli di una magnitudine (**m_{pg} ± 0,5 mag**), partendo dalla magnitudine più bassa (**m = -2**) fino alla più grande (in genere **m_{lim} ≈ 21 ÷ 23 mag**) secondo la relazione:

$$N(m_{lim}, b) = \sum_{m'=-2}^{m_{lim}} A(m', b)$$

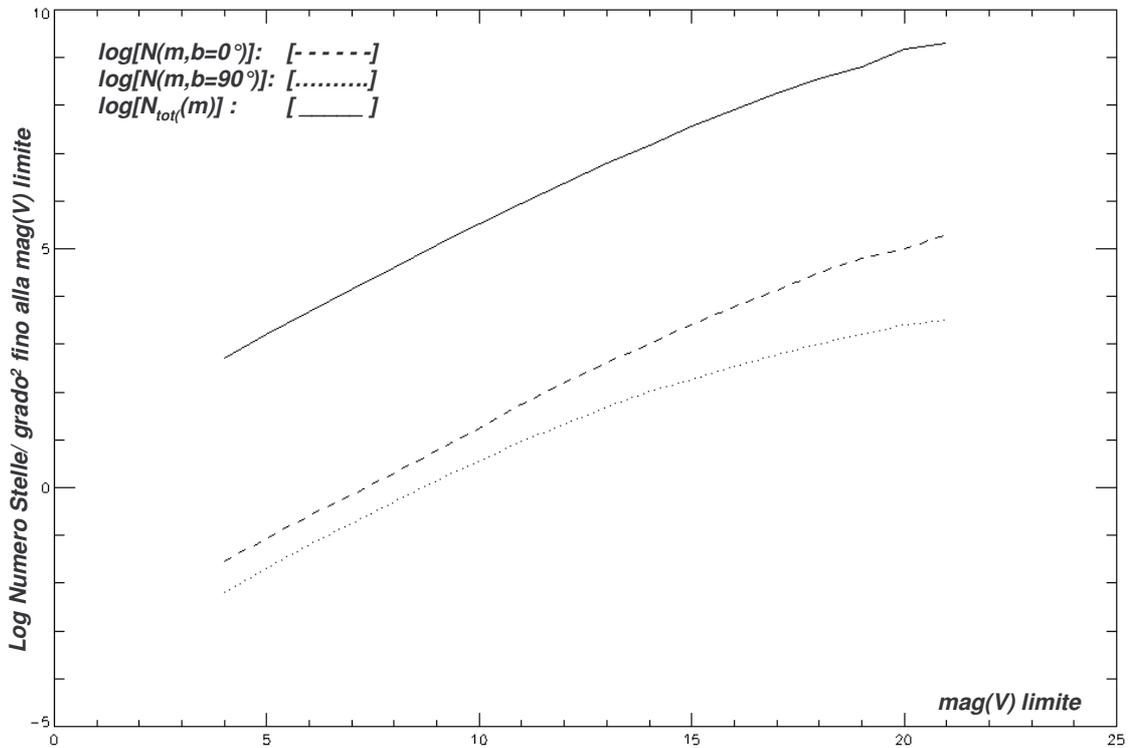


Fig. 107

Pertanto il numero totale di **Stelle** per grado quadrato di cielo fino ad una certa magnitudine è possibile quantificarlo con il grafico di **Figura 107** in cui sono rappresentati i logaritmi dei conteggi per grado² per le diverse magnitudini visuali, sia per oggetti sul **Piano Galattico** ($b = 0^\circ$; linea tratteggiata) che al **Polo Nord Galattico** ($b = +90^\circ$; linea a punti). Sempre nello stesso grafico, con linea continua, sono riportati i logaritmi dei conteggi fino alla magnitudine limite [$\log N_{tot}(m_{lim})$] su tutta la sfera **Celeste** (cioè su tutti i **41.253 gradi quadrati**).

Dal punto di vista dei tipi spettrali, con una indagine condotta su **Stelle** del **Catalogo Henry Draper (HD)** più brillanti della $m_{pg} = 8,5$, si è constatato che le **Stelle O e B** sono maggiormente concentrate nel **Piano Galattico** come pure gli **Ammassi Aperti** e le classiche **Cefeidi**. Tutti questi oggetti sono giovani con moti propri casuali bassi e si trovano per lo più in **Associazioni Stellari** nei bracci a spirale. Le **Stelle** di tipo **A**, più vecchie delle **O B**, avendo velocità casuali più elevate risultano più disperse delle **Stelle** giovani mostrando concentrazioni locali più basse, anche se in realtà la distribuzione globale sul piano è leggermente più elevata. Le **Stelle** dei tipi **F, G, M** sono equamente distribuite in tutte le direzioni. Questo fatto dipende dalla loro intrinseca bassa luminosità per cui possono essere viste solo nei dintorni del **Sole** e quindi possono essere in qualsiasi direzione dello spazio. L'unica anomalia la si riscontra con le **Stelle** di tipo **K** che mostrano una distribuzione

elevata in prossimità del **Piano Galattico**.

La ragione di questa anomalia è da ricercarsi nel fatto che il campione esaminato contiene molte **Stelle** giganti massicce di tipo **K** che appartengono preferenzialmente al **Piano Galattico**. Occorre infine ricordare che alcune **Stelle** di tipo **B** molto distanti sono disposte lungo una fascia inclinata di circa una ventina di gradi rispetto al **Piano Galattico**. Questa fascia venne chiamata **Fascia di Gould** in onore del suo scopritore, **Stephen Gould** che la scoprì nel **1879** ed ha un diametro approssimativo di **1 kparsec**. Il **Sole** occupa una posizione elevata rispetto alla fascia di circa **12 parsec** verso il **Nord Galattico** e una distanza dal suo centro di circa **100 parsec**.

Funzione di Luminosità

Se volessimo sapere quante **Stelle** ci sono, indipendentemente dalla loro magnitudine, fino ad una certa distanza **r**, occorrerebbe fare alcune considerazioni di carattere generale che anche se non corrette permetterebbero di impostare il problema. Le assunzioni sono che:

- la nostra **Galassia** ha una estensione infinita e un'età infinita
- le **Stelle** sono distribuite uniformemente nella **Galassia** con una densità **D** costante per parsec cubo,
- non esiste l'**Assorbimento Interstellare**

Pertanto l'elemento di volume di spessore **dr** e superficie **S = ω r²** (**ω** è l'angolo solido in steradiani del vertice della piramide) posto alla distanza **r** contiene un numero di **Stelle dN(r)** che integrato su tutte le distanze ci fornisce il numero totale di **Stelle** di qualsiasi magnitudine contenute entro la piramide fino alla distanza **r** secondo la relazione:

$$N(r) = \omega \cdot D \cdot \int_0^r r'^2 \cdot dr' = \frac{1}{3} \cdot \omega \cdot D \cdot r^3$$

D'altra parte ricordando la relazione del **Modulo di Distanza** ed invertendola ricavando la distanza **r** (in parsec) si ha che:

$$r = 10^{(0.2(m-M)+1)}$$

Sostituendo questa relazione nella precedente e passando ai logaritmi si hanno i conteggi delle **Stelle** fino alla **Magnitudine Apparente m** (funzione di **r**), sempre che i valori di **D**, **ω** e **M** vengano assunti come costanti ed inglobati in una costante **C** secondo la relazione:

$$\log N(m) = 0,6 \cdot m + C$$

Questa relazione andrebbe bene se tutte le **Stelle** avessero la stessa **Magnitudine Assoluta** e **Densità Stellare** costante, ma questa assunzione può essere facilmente smentita analizzando il rapporto dei conteggi tra una magnitudine e la successiva che risulta essere :

$$\log N(m+1) - \log N(m) = 0,6(m+1) + C - 0,6(m) - C = 0,6$$

questa si può anche scrivere:

$$\log \frac{N(m+1)}{N(m)} = 0,6$$

o anche :

$$\frac{N(m+1)}{N(m)} = 10^{0,6} \cong 4$$

Come si può constatare il rapporto dei conteggi tra magnitudini consecutive ci dice che le **Stelle** aumentano numericamente di **4 volte** per ogni incremento di **una magnitudine**.

Prima di verificare la coerenza con i dati osservativi del dato appena trovato, vediamo di capire la ragione per cui la **Galassia** non può avere un'estensione infinita e una densità stellare costante.

La dimostrazione si basa sul fatto che è possibile suddividere la sfera celeste in una serie indefinita di gusci sferici concentrici di spessore infinitesimo, ciascuno dei quali può contenere un numero di stelle proporzionale alla superficie del guscio considerato (ammettendo sempre una densità stellare costante) e quindi proporzionale al quadrato del raggio del guscio stesso. Per contro avremo che la luminosità apparente dalle stelle dei vari gusci tenderà ad essere via via decrescente man mano che la distanza da noi aumenta e questa decrescita sarà proporzionale, anche in questo caso, al quadrato della distanza (o raggio del guscio). Pertanto l'effetto globale della luminosità apparente di tutte le stelle di un guscio sarà costante per tutti i gusci indipendentemente dalla distanza da noi, in quanto ad un aumento del numero di stelle con la distanza corrisponde di pari passo una diminuzione della luminosità apparente di ogni stella. Quindi, se la luminosità apparente globale di ogni guscio è costante e i gusci sono infiniti (ammettendo un'estensione infinita della **Galassia**) necessariamente la luce che arriva sulla **Terra** da tutte le stelle della **Galassia** tenderà all'infinito. Questo vorrebbe dire che il cielo sarebbe infinitamente illuminato anche di notte, cosa che evidentemente non si verifica. A queste conclusioni arrivò **Olbers** agli inizi dell'ottocento formulando il cosiddetto "**Paradosso di Olbers**". Per superare questo paradosso si pensò successivamente che lo spazio fosse sempre infinito ma che avesse un tempo finito. Con questa restrizione, sapendo che la luce non poteva viaggiare più velocemente di una certa quantità, si ammise che lo spazio visibile doveva essere solo quello per cui il tempo impiegato dalla luce delle stelle più distanti non fosse superiore al tempo dell'Universo, poiché la luce di oggetti più distanti di una determinata soglia **d** (**d=c * T** dove **c** è la velocità della luce e **T** l'età dell'Universo) non avrebbe avuto il tempo di arrivare sulla **Terra**.

Questa formulazione avrebbe risolto il **Paradosso di Olbers** poiché in questo caso l'**Universo "visibile"** sarebbe stato finito e di conseguenza la somma delle luminosità apparenti di un numero finito di gusci sferici avrebbe portato ad una luminosità globale anch'essa finita (vista da **Terra**) in grado di spiegare la natura del cielo buio di notte. Come vedremo più avanti, anche queste assunzioni non sono corrette e la spiegazione del **Paradosso di Olbers** può sintetizzarsi nei seguenti punti:

- la densità delle **Stelle** non è costante nello spazio,
- esiste l'**Assorbimento Interstellare** che attenua la luce delle stelle in maniera non uniforme a seconda della direzione di osservazione
- l'Universo è in espansione con velocità crescenti con la distanza, il che comporta che oggetti agli estremi dell'Universo visibile, allontanandosi da noi a velocità confrontabili con quella della luce, per effetto Doppler, spostano la loro luminosità verso lunghezze d'onda sempre più lunghe al punto da non essere più rivelate dagli strumenti a nostra disposizione

Ritornando a quanto detto prima, se si prendono in considerazione i conteggi veri, estratti ad esempio dal grafico di **Figura 107** con linea piena, si vede che il rapporto tra due magnitudini consecutive è

circa **3** per la **magnitudine visuale 4** ma decresce regolarmente fino a **1,5** per la **magnitudine 20**, il che sta a significare che uno o entrambi i postulati restanti del modello esposto (**Densità costante e/o assenza di Assorbimento**) non sono validi.

Se la decrescita dei conteggi dipendesse solo dall'**Assorbimento**, si dimostra che questo sarebbe eccessivo in direzione dei **Poli Galattici**, mentre la diminuzione dei conteggi sarebbe plausibile con una decrescita della **Densità Stellare** man mano che ci si allontana dal **Piano Galattico**. Viceversa nel **Piano Galattico** dove la densità nei dintorni del **Sole** é pressoché costante (con una graduale crescita verso il centro galattico) si dimostra che l'**Assorbimento Interstellare a(r)** ammonta a circa **1 magnitudine per kparsec**. Infatti senza **Assorbimento** la relazione del **Modulo di Distanza** è, assumendo **r** come **distanza reale** :

$$\log(r) = 0,2 \cdot (m - M) + 1$$

quella con **Assorbimento a(r)** é data da (assumendo **ρ** come **distanza apparente**) :

$$\log(\rho) = 0,2 \cdot (m - M) + 1 + 0,2 \cdot a(r)$$

Sostituendo la prima relazione nella seconda si ha:

$$\log(\rho) = \log(r) + 0,2 \cdot a(r)$$

o in altra forma:

$$\rho = r \cdot 10^{0,2 \cdot a(r)}$$

Da questa relazione si vede che ad esempio una **stella** tipo **Sole** di **magnitudine effettiva m_v=16,5** ad una **distanza reale di 2 kparsec** con un coefficiente di **assorbimento a(r)=2** appare ad una **distanza ρ** di circa **5 Kparsec** e quindi con una **Magnitudine Apparente m_v=18,5**. Se la **Densità Stellare** fosse costante, per effetto dell'**Assorbimento** lo stesso numero di **Stelle** contenute in un volume piramidale profondo **2 Kparsec** sarebbe ora contenuto in un volume di **5 kparsec**. Poiché la densità stellare è proporzionale al volume, la piramide “apparente” avrà un volume che andrà con il cubo della distanza, e cioè circa **15** volte più grande di quello “reale” ($V_{app}/V_{reale}=5^3/2^3 \cong 15$). Detto in altri termini, la densità stellare a **2 Kpc** di distanza da noi appare circa **15** volte più bassa che nella realtà. I conteggi stellari osservati indicano che il modello di **Assorbimento** adottato è abbastanza vicino alla realtà, nei dintorni del **Sole**, anche se la variabilità spaziale di densità stellare gioca un ruolo non trascurabile.

Per **Densità Spaziale ν** intendiamo il numero di **Stelle** per parsec cubo di **Magnitudine Assoluta M** e tipo spettrale **Sp** alla distanza **r** dal **Sole** in una certa direzione di coordinate galattiche (**l,b**).

La funzione $\nu(r,l,b,M,Sp)$ può essere rappresentata dal prodotto di due funzioni:

$$\nu(r,M,Sp) = \Phi(M,Sp) \cdot D_{Sp}(r)$$

in cui la funzione $D_{Sp}(r)$ rappresenta la **Funzione di Densità Relativa** di **Stelle** di tipo Spettrale **Sp** alla distanza **r** in unità della densità stellare nei pressi del **Sole**, mentre $\Phi(M,Sp)$ rappresenta il

numero di **Stelle** per parsec cubo nei dintorni del **Sole** aventi **Magnitudine Assoluta** M e tipo spettrale Sp . La funzione $\Phi(M, Sp)$ viene genericamente chiamata **Funzione di Luminosità**.

Facciamo notare che nella relazione precedente, per semplicità, sono state omesse le coordinate (l, b) ma in realtà questi conteggi sono sempre riferiti a una specifica coppia di coordinate galattiche.

Vediamo ora come è legata la funzione $A(m, Sp)$ che fornisce i conteggi di **Stelle** contenuti entro un'area di cielo unitario avente magnitudine m e tipo spettrale Sp , con la **Densità Spaziale** $v(r, M, Sp)$.

Se una **Stella** ha una **Magnitudine Assoluta** M , assumerà la **Magnitudine Apparente** m ad una certa distanza r secondo la solita relazione:

$$m = 5 \cdot \log(r) + a(r) + M - 5$$

mentre un volume di spessore dr e di superficie angolare ω sarà dato da (vedi **Figura 108**) :

$$dV = \omega \cdot r^2 \cdot dr$$

Il contributo di **Stelle** di **Magnitudine Apparente** m appartenenti al volume dV alla distanza r è dato utilizzando le ultime 3 relazioni da :

$$dA(m, Sp) = \Phi(M, Sp) \cdot D_{Sp}(r) \cdot dV$$

$$dA(m, Sp) = \Phi[m + 5 - 5 \cdot \log(r) - a(r), Sp] \cdot D_{Sp}(r) \cdot \omega \cdot r^2 \cdot dr$$

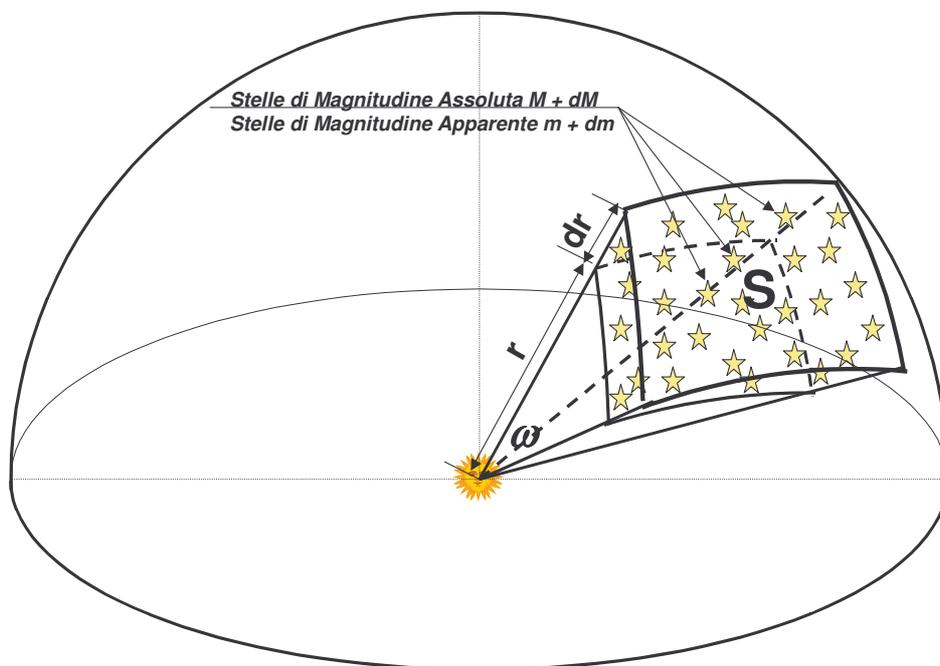


Fig. 108

Integrando questa relazione su tutte le distanze da zero a infinito si ha il numero totale di **Stelle**

$A(m, Sp)$ di tutte le **Magnitudini Assolute M** che per effetto della distanza mostrano tutte la stessa **Magnitudine Apparente m** entro la piramide di angolo solido ω Tale integrale ha la seguente forma:

$$A(m, Sp) = \omega \cdot \int_{r=0}^{\infty} \Phi[m + 5 - 5 \cdot \log(r) - a(r), Sp] \cdot D_{Sp}(r) \cdot r^2 \cdot dr$$

Tuttavia nella pratica corrente le osservazioni forniscono solo il numero di **Stelle di Magnitudine Apparente m** ma non il tipo spettrale in quanto, ad oggi, non tutte le **Stelle** visibili con i telescopi sono state osservate spettroscopicamente.

Pertanto l'equazione integrale precedente, semplificata ,può essere scritta nella seguente forma:

$$A(m) = \omega \cdot \int_{r=0}^{\infty} \Phi[m + 5 - 5 \cdot \log(r) - a(r)] \cdot D(r) \cdot r^2 \cdot dr$$

In questo caso i conteggi $A(m)$ dipendono solo dalla **Magnitudine Apparente m** , mentre la **Funzione di Luminosità $\Phi(M, Sp)$** viene sostituita dalla più semplice funzione $\Phi(M)$ chiamata **Funzione Generale di Luminosità** che rappresenta la somma delle **Funzioni di Luminosità** di tutti i tipi spettrali per una data **Magnitudine Assoluta M** . Invece la **Funzione di Densità $D(r)$** può essere interpretata come il numero totale di **Stelle** di tutti i tipi spettrali per unità di volume alla distanza r in unità del numero totale di **Stelle** di tutti i tipi spettrali per unità di volume nei dintorni del **Sole**.

Questa equazione integrale viene chiamata **Equazione Fondamentale della Statistica Stellare**.

Risolvere analiticamente questa equazione è praticamente impossibile per cui l'integrale lo si riduce ad una sommatoria di tanti termini quante sono le classi di **Magnitudini Assolute** considerate nel conteggio. Anche gli spessori del tronco di piramide sono scelti in modo che l'incremento di distanza corrisponda per una certa **Stella** ad un incremento di una **Magnitudine Apparente** .

Infatti data una **Stella di Magnitudine Assoluta M** , questa ad una distanza r_n avrà una **Magnitudine Apparente m** secondo la relazione:

$$M - m = 5 - 5 \log(r_n)$$

lo stesso tipo di **Stella** ad una distanza r_{n-1} sarà più brillante di una magnitudine secondo la relazione:

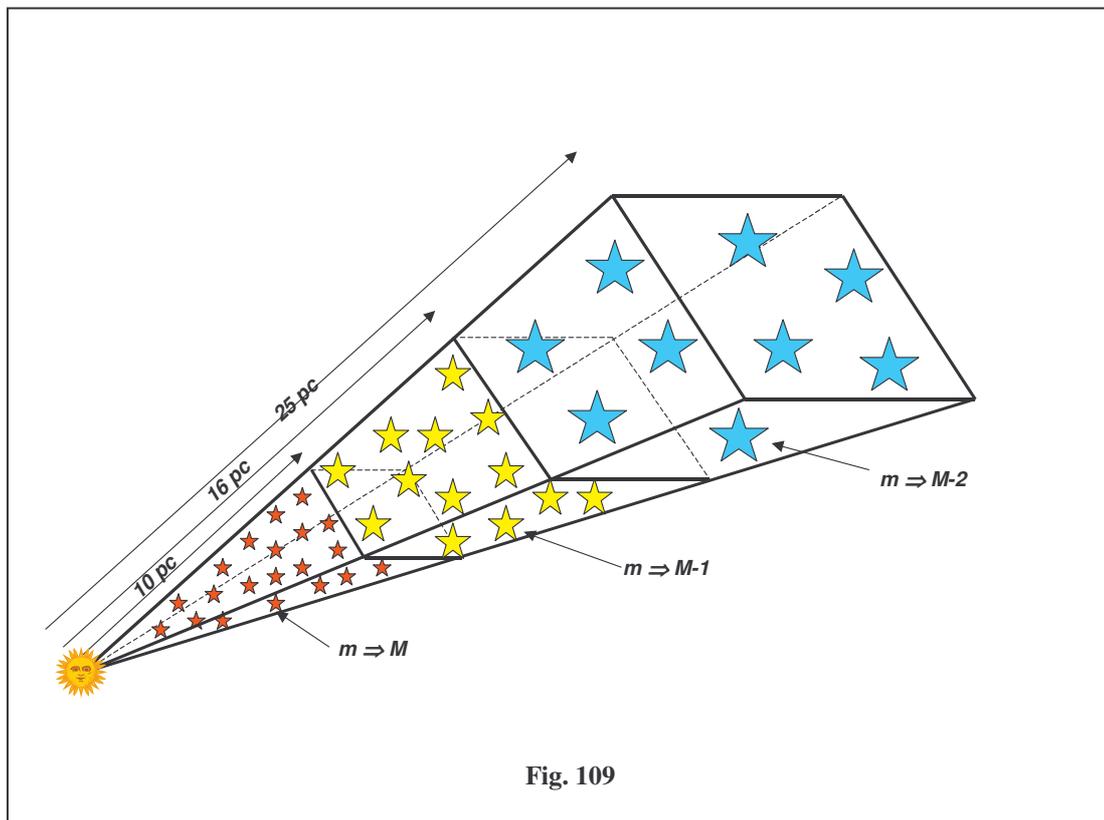
$$M - (m - 1) = 5 - 5 \log(r_{n-1})$$

Sottraendo membro a membro le due relazioni si ha che:

$$\log(r_n) - \log(r_{n-1}) = 0,2 \quad \text{da cui} \quad \frac{r_n}{r_{n-1}} \cong 1,58$$

Questo significa che volumi piramidali (o conici o di altra forma) con altezze **1,58 volte più profondi**

dei precedenti portano ad avere delle **Magnitudini Apparenti** più deboli di una magnitudine, sempre riferite ad una prestabilita **Magnitudine Assoluta**. Poiché i volumi vanno con il cubo dell'altezza questi risultano $1,58^3 = 3,98$ volte più grandi di quelli immediatamente precedenti. Ribaltando il discorso delle **Magnitudini Assolute** con quelle **Apparenti** (il che é lo stesso) si ha che il conteggio del numero di **Stelle** di una certa magnitudine **m** entro un'area di cielo che sottende un angolo solido ω può essere considerata come la somma dei conteggi di tanti tronchi di piramide situati a distanze tali che, conservando il rapporto **1,58** visto poco fa, il passaggio da un tronco di piramide al successivo determini un decremento di una **Magnitudine Assoluta**, a parità di **Magnitudine Apparente m** per tutti i tronchi di piramide. Per comprendere meglio il concetto aiutiamoci con la **Figura 109**, nella quale supponiamo che il primo strato abbia una profondità di **10 pc**. Questo significa che le **Stelle** di **Magnitudine Assoluta M** contenute in questo volume mostreranno tutte mediamente una **Magnitudine Apparente m**, mentre nel secondo strato tra i **10** e i **16 pc** ($10 \cdot 1,58 \approx 16$ pc), le **Stelle**, per avere sempre la stessa **Magnitudine Apparente m**, debbono essere intrinsecamente più brillanti, cioè debbono avere una **Magnitudine Assoluta (M-1)** mag. Analogo discorso per il terzo strato tra **16** e **25** parsec in cui le **Stelle** per mostrare la stessa **Magnitudine Apparente** dei precedenti strati debbono avere una **Magnitudine Assoluta (M-2)** mag, e così via per tutti gli strati successivi .



Quindi l'equazione integrale vista prima, che fornisce il numero di oggetti di una certa **Magnitudine Apparente m**:

$$A(m) = \omega \cdot r \int_{r=0}^{\infty} \Phi[m + 5 - 5 \cdot \log(r) - a(r)] \cdot D(r) \cdot r^2 \cdot dr$$

può essere messa nella forma:

$$A(m) = \sum_{i=0}^n V_i \cdot \Phi(M-i) \cdot D_i$$

dove $i = 0, n$ rappresenta l' i -esimo tronco di piramide preso in considerazione, V_i il volume dell' i -esimo tronco, $\Phi(M-i)$ la **Funzione Generale di Luminosità** relativa alla **Magnitudine Assoluta (M-i)** nei dintorni del **Sole** e D_i la **Densità Stellare** rapportata a quella nei dintorni del **Sole** di **Stelle** dell' i -esimo tronco di **Magnitudine Assoluta (M-i)**.

Di questa equazione si conoscono i conteggi stellari $A(m)$ dati dalle osservazioni per una certa area di cielo (in genere per grado quadrato) di **Stelle** di magnitudine $m \pm 0,5$, i volumi V_i dei tronchi di piramide e le **Funzioni Generali di Luminosità** $\Phi(M-i)$ (date da apposite tabelle), mentre le uniche incognite restano le D_i che dipendono dalle distanze r_i dei vari strati.

Le **Funzioni di Luminosità**, come abbiamo detto sono tabulate in tabelle, ma queste derivano da osservazioni di **Stelle** nei dintorni del **Sole** per le quali sono state determinate le distanze o per via trigonometrica o per via spettroscopica o tramite lo studio dei moti propri combinati con le **Magnitudini Apparenti** o per mezzo di confronti delle distribuzioni dei moti propri e delle velocità tangenziali.

Nella **Figura 110** sono riportati i valori della **Funzione Generale di Luminosità**, cioè il numero di **Stelle** contenute in una sfera di **1.000 parsec cubici** (equivalente ad una sfera di **6,2 parsec** di raggio) nei dintorni del **Sole**, aventi una **Magnitudine Assoluta fotografica** $M_{pg} \pm 0,5$ mag per tutti gli intervalli unitari di magnitudine fino alla $M_{pg}=22$

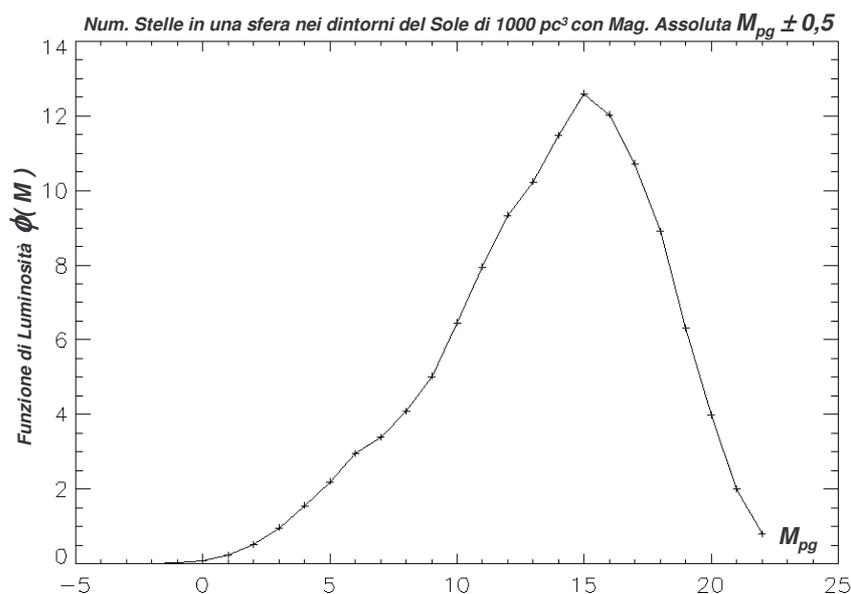


Fig. 110

Come è possibile vedere dalla **Figura 110** le **Stelle** intrinsecamente brillanti sono poche e tendono ad aumentare quasi linearmente di numero man mano che diventano intrinsecamente più deboli, raggiungendo la massima densità nei dintorni del **Sole** attorno alla $M_{pg} \cong 15$ con **Stelle** nane **K** e **M** per poi ridiscendere di numero molto repentinamente fino alla magnitudine limite. Inoltre il maggior contributo della massa stellare viene dato dalle numerose **Stelle** intrinsecamente deboli, mentre il picco di luminosità massimo è attribuibile invece alle rare e intrinsecamente brillanti **Stelle K** e **M**. Tuttavia il grafico di **Figura 110** contiene diversi effetti di selezione dovuti essenzialmente al fatto che la popolazione stellare censita è solo rappresentativa degli oggetti situati nei dintorni del **Sole**. Infatti la stessa **Funzione di Luminosità** in prossimità dei bracci a spirale darebbe sicuramente un maggior contributo per le **Stelle** intrinsecamente molto brillanti, in quanto le **Stelle O** e **B** sono più frequenti in quelle regioni che nelle nostre vicinanze. Per contro nei dintorni del **Sole** potrebbero esistere **Stelle** intrinsecamente molto deboli che causa della loro distanza da noi avrebbero una **Magnitudine Apparente** più alta da non essere rivelata neanche dai più potenti telescopi terrestri e spaziali ad oggi esistenti. A rendere ancora più impreciso il grafico si aggiunge l'**Assorbimento Interstellare** che anche se ben modellizzato ha ancora dei margini di incertezza su grandi distanze. Come accennato prima l'unica incognita nell'**Equazione Fondamentale** è la **Densità Stellare** dei vari strati (tronchi di piramide) distribuiti a varie distanze r_i dal **Sole**. Infatti di questa equazione sono noti dalle osservazioni i conteggi stellari $A(m)$, le $\Phi(M-i)$ note dalle tabelle (analoghe al grafico di **Figura 110**), così come l'**Assorbimento Interstellare** $a(r)$. Pertanto le $D(r)$ si possono ottenere assumendo valori approssimati di queste densità, derivate da studi statistici, che inserite nell'equazione precedente sotto forma di sommatoria, forniscono valori di $A(m)$, questa volta, calcolati. Gli $A(m)$ calcolati confrontati con gli $A(m)$ osservati forniscono degli scarti che sono un indice dell'accuratezza delle densità trovate. In **Figura 111** sono riportati i grafici delle distribuzioni delle **Densità Stellari** derivate dai conteggi stellari in unità delle **Densità Stellari** nei dintorni del **Sole**. In particolare in questa figura sono riportate sia le **Densità Apparenti** $\Delta(\rho)$ in funzione del logaritmo della distanza apparente ρ , cioè quelle dedotte assumendo l'esistenza dell'**Assorbimento Interstellare** del tipo :

$$a(r) = 1,0587 K r \quad \text{con} \quad K = 1 \text{ mag/Kpc}$$

e sia le **Densità Reali** $D(r)$ in funzione della distanza vera r , cioè quelle dedotte come se non esistesse l'**Assorbimento**. Infatti la distribuzione delle **Densità Apparenti** così come viene osservata è rappresentata in **Figura 111** con una linea tratteggiata, mentre quella **Vera** è rappresentata con linea piena. La valutazione delle **Distanze Apparenti** differisce da quella reale causa l'**Assorbimento** che induce a credere le **Stelle** più distanti di quello che sono. Tuttavia la curva con le **Densità Reali** può ritenersi attendibile solo entro i **1.000 parsec** dal **Sole**, in quanto come è possibile vedere dalla **Figura 111** questa curva cresce esponenzialmente con l'aumentare della distanza in contrasto con le osservazioni che indicano un **Assorbimento Interstellare** meno marcato per distanze oltre i **1.000 parsec**.

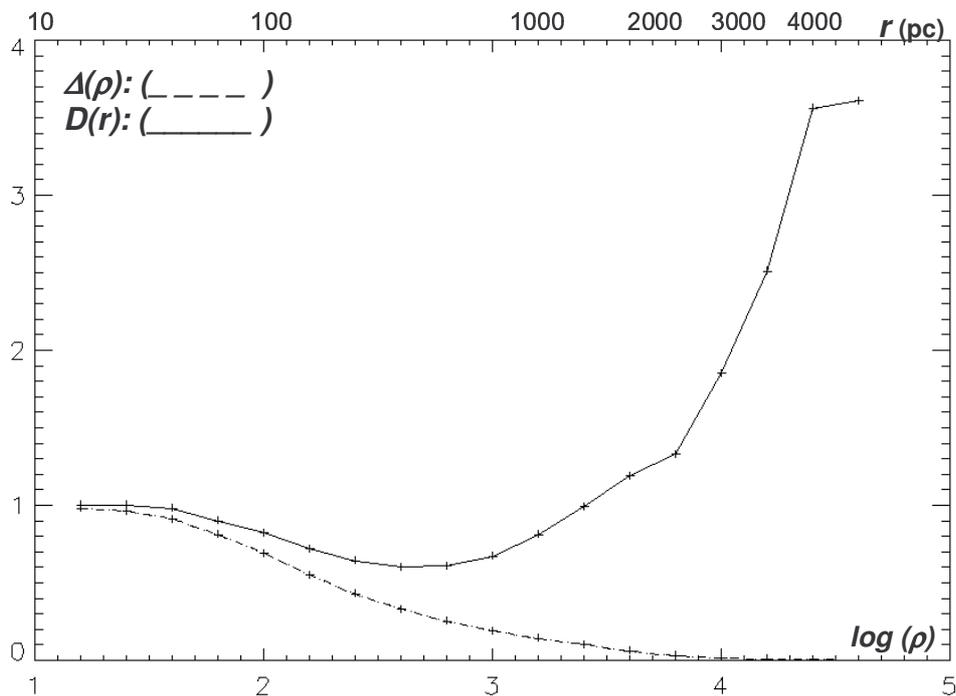


Fig. 111

Funzione di Luminosità Iniziale e Funzione di Massa Iniziale

Come sappiamo la **Funzione Generale di Luminosità** $\Phi(M)$ descrive la composizione stellare per unità di volume nei dintorni del **Sole** al tempo presente, ma questa funzione non ci dice con quale frequenza queste **Stelle** si sono formate. Infatti sappiamo che **Stelle** con massa inferiore a quella solare vivono sulla sequenza principale per periodi più lunghi dell'attuale età della **Galassia**, mentre le **Stelle** con massa maggiore vivono per un periodo inferiore. A questo proposito **Salpeter** introdusse il concetto di **Funzione di Luminosità Iniziale** $\psi(M_V)$ che fornisce il numero di **Stelle** formate per unità di magnitudine e volume in funzione della **Magnitudine Assoluta** M_V . Uno dei tanti metodi per calcolare tale funzione può essere quello di porre uguale la **Funzione Iniziale** a quella **Generale** ($\psi(M_V) = \Phi(M_V)$) nel caso in cui il tempo di vita della **Stella** nella sequenza principale (τ_{MS}) sia maggiore di quello dell'età della **Galassia** (τ_G), cioè per **Stelle** di tipo spettrale avanzato, mentre per le **Stelle** intrinsecamente brillanti in cui il tempo di vita è minore di quello della **Galassia** la $\psi(M_V)$ può essere rappresentata con la relazione:

$$\Psi(M_V) = \frac{\tau_G}{\tau_{MS}} \cdot \Phi(M_V)$$

In **Figura 112** sono rappresentate le due funzioni di **Luminosità Generale** (linea piena) ed **Iniziale** (linea tratteggiata) questa volta in funzione delle **Magnitudini Assolute Visuali**. Come è possibile

vedere la **Funzione di Luminosità Iniziale** fornisce un numero di **Stelle**, entro una sfera di **1000 parsec³** nei dintorni del **Sole** per ogni unità di **Magnitudine Assoluta Visuale**, superiore a quella della **Funzione Generale di Luminosità** fino alla **Magnitudine 5** dopodichè le due distribuzioni sono equivalenti. In questo caso si vede che il tasso di formazione delle **Stelle** intrinsecamente brillanti è addirittura più elevato di quello delle **Stelle** meno brillanti anche se nella realtà ne osserviamo di meno per via della loro breve vita (se paragonata a quella delle **Stelle** intrinsecamente deboli).

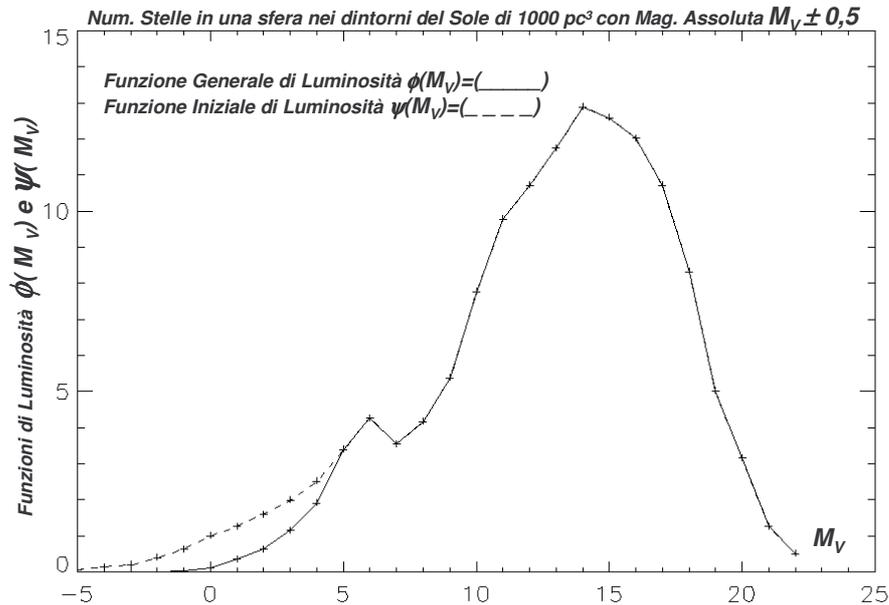


Fig. 112

Tramite la conoscenza della relazione **Massa-Luminosità Salpeter** trovò una legge di potenza che chiamò in maniera analoga alla precedente funzione con il nome di **Funzione di Massa Iniziale** avente la forma:

$$\xi(\mathcal{M}) = C \cdot \left(\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_o} \right)^{-\kappa}$$

Questa relazione rappresenta il numero totale di **Stelle** al momento della loro nascita per parsec cubo di massa \mathcal{M} in unità di masse solari \mathcal{M}_o , dove il coefficiente κ vale mediamente **2,35**. Recentemente **Kroupa** e altri hanno modificato la legge di potenza di **Salpeter** attribuendo valori differenti al coefficiente κ a seconda della massa delle **Stelle**. In particolare **Kroupa** indica per **Stelle** con massa inferiore alle **0,5 masse solari** un coefficiente κ uguale a **1,20**, mentre per **Stelle** tra **0,5 e 10** masse solari un coefficiente pari a **2,20**, infine per **Stelle** con masse superiori alle **10** masse solari un coefficiente di **4,5**. Come è possibile vedere in **Figura 112** è riportata con linea piena il logaritmo della **Funzione** $\xi(\mathcal{M})$ secondo Kroupa, mentre la linea a tratto-punto rappresenta la **Funzione di Massa** al giorno d'oggi. La curva a punti grandi rappresenta la funzione secondo **Scalo**, mentre le altre curve con croci e asterischi si riferiscono a differenti età del **Disco galattico**.

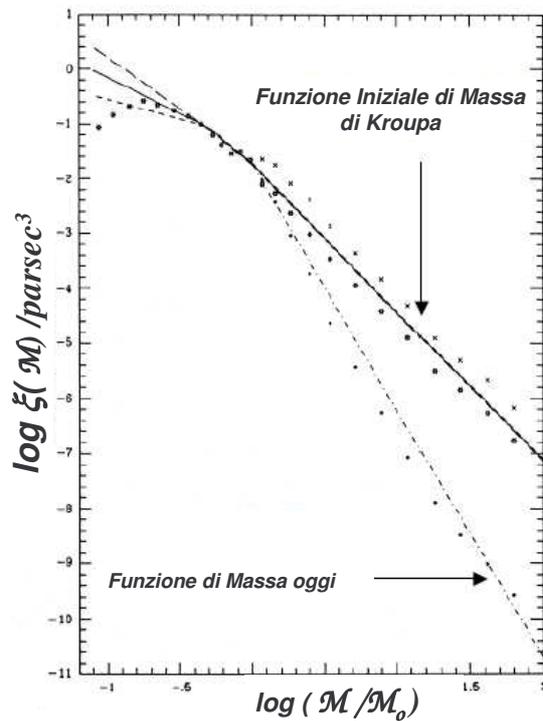


Fig. 113

Qualunque sia la corretta **Funzione** $\xi(\mathcal{M})$ é facilmente intuibile capire che le **Stelle** di massa piccola si formano più facilmente di quelle aventi grande massa come pure é intuibile capire che la **Funzione di Massa** vista al giorno d'oggi tende a dare un numero di **Stelle** via via decrescente man mano che la massa originale della **Stella** era sempre più grande. Questo fenomeno lo si spiega per via della rapida perdita di massa nel corso della vita di una **Stella** che é tanto più grande quanto questa é più massiccia.

Malmquist Bias

Il **Malmquist Bias** é un effetto che ha scoperto **Malmquist** osservando la luminosità delle **Stelle** di tipo spettrale **F** della nostra **Galassia**. Vediamo di ricostruire analiticamente e concettualmente tale fenomeno. Supponiamo di osservare un campione di **Stelle** tutte dello stesso tipo spettrale per una certa regione di cielo entro una determinata **Magnitudine Limite Apparente m**. Poiché le **Stelle** di un certo tipo spettrale non hanno esattamente tutte la stessa **Magnitudine Assoluta**, supponiamo che queste abbiano una distribuzione gaussiana in cui M_0 rappresenta il valor medio della distribuzione e σ la sua dispersione. In altri termini la vera **Funzione di Luminosità** per le **Stelle** di quel tipo spettrale sarà:

$$\Phi(M) = \Phi_0 \cdot e^{-(M-M_0)^2 / (2 \cdot \sigma^2)}$$

in cui Φ_0 rappresenta il punto di picco della funzione gaussiana.

Assumendo $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ come **Densità Spaziale** delle **Stelle**, il numero $\mathbf{A}(\mathbf{m})$ di oggetti di un certo tipo spettrale con **Magnitudine Assoluta** \mathbf{M} , ad una certa distanza \mathbf{r} si può scrivere con la seguente equazione integrale:

$$\mathbf{A}(\mathbf{m}) = \int_0^{\infty} \Phi(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}^2 \cdot d\mathbf{r}$$

Si noti che l'integrale è esteso per tutte le distanze da zero a infinito, anche se il contributo di **Stelle** deriva solo dalla **Funzione di Luminosità** con un valore prestabilito di **Magnitudine Assoluta** ($\mathbf{M} \pm d\mathbf{M}$), in quanto solo certe distanze ($\mathbf{r} \pm d\mathbf{r}$) vengono prese in considerazione per fornire dei conteggi di **Stelle** con magnitudini apparenti (\mathbf{m}).

Inserendo la **Funzione di Luminosità** di tipo gaussiano vista prima nella precedente equazione integrale si ha:

$$\mathbf{A}(\mathbf{m}) = \int_0^{\infty} \Phi_0 \cdot e^{-(\mathbf{M}-\mathbf{M}_0)^2 / (2 \cdot \sigma^2)} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}^2 \cdot d\mathbf{r}$$

Poiché la derivata rispetto alla **Magnitudine Assoluta** è uguale alla derivata rispetto alla **Magnitudine Apparente** si può scrivere che:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}(\mathbf{m})}{d\mathbf{m}} &= \int_0^{\infty} \Phi_0 \cdot \frac{d}{d\mathbf{M}} \left\{ e^{-(\mathbf{M}-\mathbf{M}_0)^2 / (2 \cdot \sigma^2)} \right\} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}^2 \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^{\infty} \Phi_0 \cdot \left\{ -\frac{2 \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0)}{2 \cdot \sigma^2} \right\} \cdot \left\{ e^{-(\mathbf{M}-\mathbf{M}_0)^2 / (2 \cdot \sigma^2)} \right\} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}^2 \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\mathbf{M}_0}{\sigma^2} \Phi(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}^2 \cdot d\mathbf{r} - \int_0^{\infty} \frac{\mathbf{M}}{\sigma^2} \Phi(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}^2 \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{\mathbf{M}_0}{\sigma^2} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{m}) - \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} \mathbf{M} \cdot \Phi(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}^2 \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

dividendo per $\mathbf{A}(\mathbf{m})$ si ha:

$$\frac{dA(m)/dm}{A(m)} = \frac{M_0}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{\int_0^\infty M \cdot \Phi(M) \cdot D(r) \cdot r^2 \cdot dr}{\int_0^\infty \Phi(M) \cdot D(r) \cdot r^2 \cdot dr}$$

l'ultimo termine è per definizione la **Magnitudine Assoluta Media** $\langle M \rangle$ del campione per cui l'equazione integrale diventa:

$$M_0 - \langle M \rangle = \sigma^2 \cdot \frac{d(\ln A(m))}{dm}$$

Questa equazione chiamata **Malmquist Bias** sta ad indicare che le **Magnitudini Assolute Medie** osservate $\langle M \rangle$ sono più brillanti di quelle teoriche M_0 , essendo la differenza di magnitudini positiva e proporzionale al quadrato della dispersione. In particolare si può dimostrare che assumendo come costante la densità spaziale $D(r)$ la relazione precedente diventa:

$$M_0 - \langle M \rangle = 1,382 \cdot \sigma^2$$

Concettualmente questa equazione può spiegarsi osservando la **Figura 114** in cui sono rappresentati due tronchi di piramide di spessore dr situati ad una distanza r da noi, che contengono **Stelle** di uno specifico tipo spettrale, aventi **Magnitudini Assolute** nell'intervallo $(M \pm dM)$.

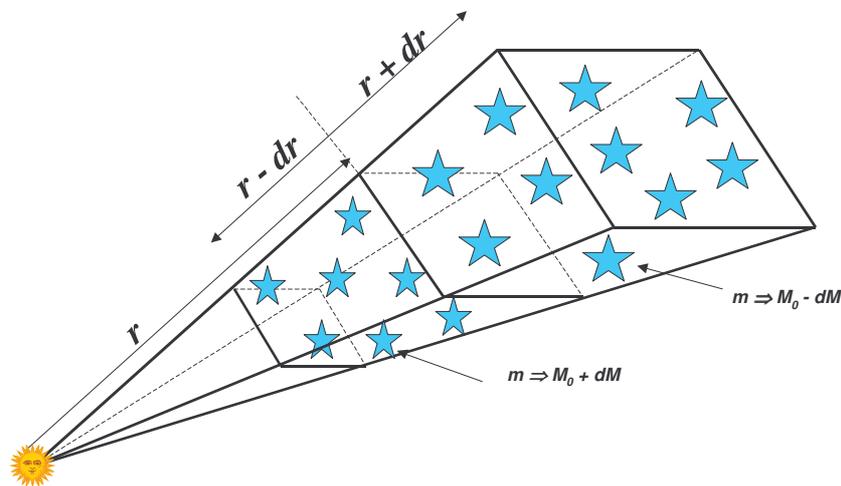


Fig. 114

Dalla **Figura 114** si constata abbastanza facilmente che il tronco di piramide tra r e $r+dr$ ha un volume maggiore di quello tra $r-dr$ e r . Pertanto assumendo una densità spaziale $D(r)$ costante nei due tronchi, il numero di **Stelle** osservate con **Magnitudine Apparente** m sarà costituito da molte **Stelle** intrinsecamente più brillanti di M_0 (magnitudine tra $M_0 - dM$ e M_0) che si trovano nel tronco di piramide più esterno, mentre nel tronco più interno ci saranno meno **Stelle** intrinsecamente più deboli di M_0 (magnitudine tra M_0 e $M_0 + dM$). Questa disparità di conteggi nei due volumi

porta come conseguenza a stimare un valor medio osservato della **Magnitudine Assoluta** $\langle \mathbf{M} \rangle$ leggermente più basso di \mathbf{M}_0 come mostrato dalla relazione precedente.

Anche la dispersione teorica σ risente dell'effetto **Malmquist bias** per cui vediamo di analizzare il modo con cui il σ viene modificato. Partendo da un punto della relazione precedente:

$$\frac{d\mathbf{A}(\mathbf{m})}{d\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{M}_0}{\sigma^2} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{m}) - \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} \mathbf{M} \cdot \Phi(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}^2 \cdot d\mathbf{r}$$

calcoliamo la derivata seconda:

$$\frac{d^2\mathbf{A}(\mathbf{m})}{d\mathbf{m}^2} = \frac{\mathbf{M}_0}{\sigma^2} \cdot \frac{d\mathbf{A}(\mathbf{m})}{d\mathbf{m}} - \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} \frac{d}{d\mathbf{m}} \{ \mathbf{M} \cdot \Phi(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}^2 \} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\mathbf{M}_0}{\sigma^2} \cdot \frac{d\mathbf{A}(\mathbf{m})}{d\mathbf{m}} - \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} \frac{d}{d\mathbf{m}} \left\{ \mathbf{M} \cdot \Phi_0(\mathbf{M}) \cdot e^{-\frac{(\mathbf{M}-\mathbf{M}_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}^2 \right\} \cdot d\mathbf{r}$$

sostituendo la precedente in questa:

$$= \frac{\mathbf{M}_0}{\sigma^2} \cdot \left\{ \frac{\mathbf{M}_0}{\sigma^2} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{m}) - \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} \mathbf{M} \cdot \Phi(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}^2 \cdot d\mathbf{r} \right\} - \frac{1}{\sigma^2} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{m}) + \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} \mathbf{M} \cdot \frac{(\mathbf{M}-\mathbf{M}_0)}{\sigma^2} \cdot \Phi(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}^2 \cdot d\mathbf{r}$$

dividendo il tutto per $\mathbf{A}(\mathbf{m})$ si ha:

$$\frac{d^2\mathbf{A}(\mathbf{m})/d\mathbf{m}^2}{\mathbf{A}(\mathbf{m})} = \frac{\mathbf{M}_0^2}{\sigma^4} - \frac{\mathbf{M}_0 \cdot \langle \mathbf{M} \rangle}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2} + \frac{\langle \mathbf{M}^2 \rangle}{\sigma^4} - \frac{\mathbf{M}_0 \cdot \langle \mathbf{M} \rangle}{\sigma^4}$$

ma questa può anche essere scritta come:

$$\sigma^2 \cdot \left\{ 1 + \sigma^2 \cdot \frac{d^2 \ln \mathbf{A}(\mathbf{m})}{d\mathbf{m}^2} \right\} = (\mathbf{M}_0 - \langle \mathbf{M} \rangle)^2$$

poiché la parte destra di questa equazione rappresenta proprio la dispersione in **Magnitudine** osservata σ_{oss} , la relazione precedente si può scrivere:

$$\sigma_{oss}^2 = \sigma^2 \cdot \left\{ 1 + \sigma^2 \cdot \frac{d^2 \ln \mathbf{A}(\mathbf{m})}{d\mathbf{m}^2} \right\}$$

Come si può facilmente constatare la dispersione osservata (σ_{oss}) è più grande di quella vera (σ) ed in linea di massima le due **Funzioni di Luminosità** corrispondenti per un certo tipo spettrale possono essere rappresentate come due gaussiane di ampiezza e σ diversi spostate della quantità $|\mathbf{M}_0 - \langle \mathbf{M} \rangle|$ come mostrato sinteticamente in **Figura 115**.

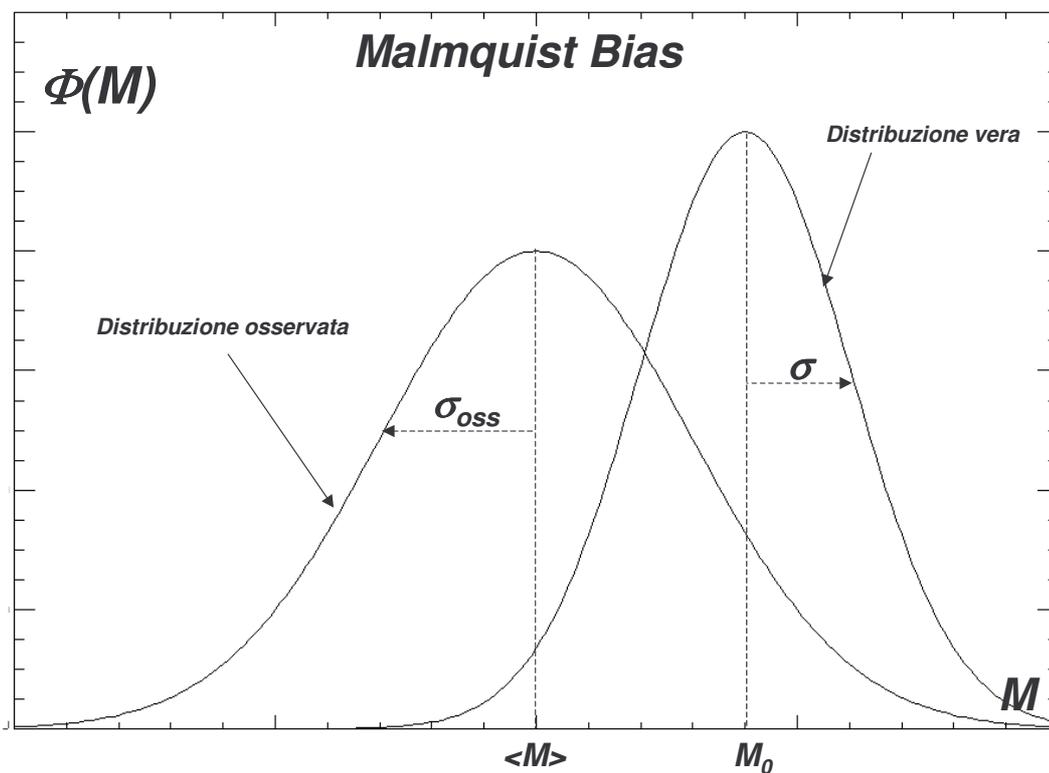


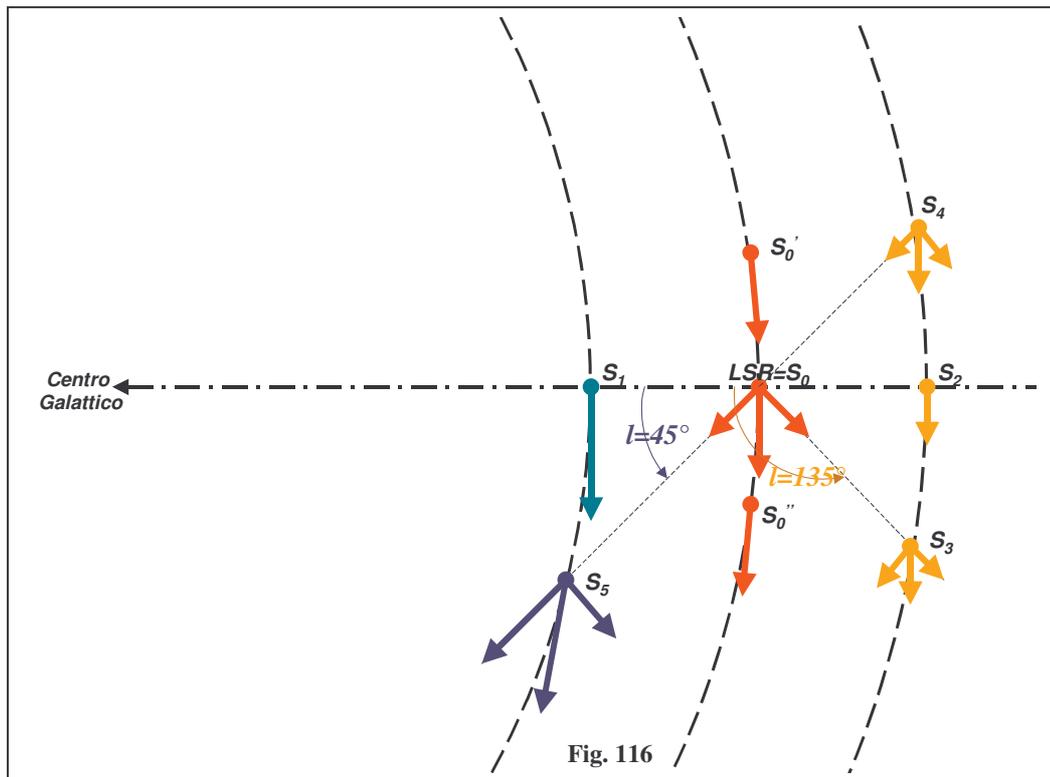
Fig. 115

Cinematica della Rotazione Galattica

Nei capitoli precedenti abbiamo visto che la maggior parte della massa visibile della nostra **Galassia** è situata nel **Piano Galattico** e la rivoluzione delle **Stelle** attorno al **Centro Galattico** avviene con una velocità angolare più o meno costante entro **3 Kparsec** da questo, mentre nella parte più esterna della **Galassia** il moto delle **Stelle** supponiamo erroneamente che segua un andamento orbitale di tipo kepleriano. Vediamo ora di esaminare analiticamente in dettaglio questo moto differenziale delle **Stelle**.

Supponiamo di analizzare il moto delle **Stelle** nelle vicinanze del **Sole**, ammettendo che queste siano dotate solo di moto differenziale kepleriano attorno al **Centro Galattico** e che non abbiano **Moti Propri Peculiari**. In questa situazione possiamo fare riferimento alla **Figura 116** in cui con S_0 si è indicata la posizione del **Sole**, o più correttamente la posizione del **LSR** (privo del **moto peculiare** del **Sole**). La velocità tangenziale di questo punto in **Figura 116** è stata rappresentata con una freccia spessa di colore rosso perpendicolare alla direzione che va verso il **Centro Galattico**. Altre **Stelle** (anche queste assunte prive di **moto proprio peculiare**) in differenti posizioni nel **Piano della Galassia** sono state rappresentate in figura con colori e con velocità tangenziali differenti a seconda della loro distanza dal centro in accordo con il modello di moto kepleriano. Infatti come è possibile constatare dalla figura, la **Stella S_1** , più vicina al **Centro Galattico**, mostra un vettore velocità (freccia verde) più elevato di S_0 , mentre le **Stelle S_2 , S_3 e S_4** più lontane di S_0 mostrano velocità (freccie color nocciola) uguali tra di loro (perché appartenenti alla stessa orbita) ma più basse di S_0 . La **Stella S_5** invece (freccia rossa) pur mostrando una velocità uguale a S_1 , ha una longitudine galattica di 45° che occupa una posizione particolare del **Piano Galattico**. Vedremo tra poco che

questa posizione è quella che fornisce il maggior contributo sulle velocità radiali relative assieme ad altre posizioni aumentate di 90° , 180° e 270° rispetto alla longitudine $l=45^\circ$.



Poiché le velocità delle **Stelle** viste da $S_0 \equiv LSR$ si possono scomporre in due componenti (radiale e tangenziale), dalla **Figura 116** si può facilmente intuire che le **Stelle** aventi longitudine galattica $l=0^\circ$ (S_1) e $l=180^\circ$ (S_2) non hanno alcuna velocità radiale rispetto al **LSR**, in quanto le loro velocità spaziali intorno al **Centro Galattico** corrono parallele. Analogo discorso per le **Stelle** (S_0') e (S_0'') aventi $l=270^\circ$ e $l=90^\circ$ rispettivamente, che trovandosi sulla stessa orbita del **LSR** viaggiano con la sua stessa velocità e quindi non mostrano componenti radiali. La **Stella** (S_5) ad $l=45^\circ$ invece mostra una velocità radiale maggiore di quella del **LSR** per cui tenderà ad allontanarsi (velocità radiale positiva) relativamente a questo punto. Invece la **Stella** (S_3) ad $l=135^\circ$ avrà una velocità radiale minore di quella del **LSR** per cui tenderà ad avvicinarsi a questo punto (velocità radiale negativa).

Se volessimo rappresentare le velocità radiali di **Stelle** equidistanti dal **LSR** di **2** oppure **1** o **0,5 Kparsec** distribuite nel **Piano Galattico** su tutte le longitudini si avrebbero degli andamenti a doppia sinusoidi come mostrato in **Figura 117** (più avanti vedremo come sono state ricavate queste sinusoidi).

Prendendo in considerazione questa volta le componenti trasversali delle velocità relative al **LSR**, si nota che, analizzando sempre la **Figura 116**, la **Stella** (S_1) ha una velocità trasversale maggiore di quella di (S_0) per cui la differenza vettoriale tra le velocità di (S_1) e (S_0) risulta positiva e di conseguenza anche il moto proprio è positivo, mentre per le **Stelle** (S_0') e (S_0'') non si ha componente trasversale rispetto a (S_0) per cui il moto proprio è nullo. Per le **Stelle** (S_4) e (S_5) il moto proprio trasversale visto da (S_0) sarà sempre positivo in quanto la componente trasversale di (S_5) è maggiore di quella in (S_0) e quindi la differenza risulta positiva, mentre la componente trasversale di (S_4) pur essendo minore di quella di (S_0) darà comunque un moto proprio positivo, in

quanto la **Stella** (S_4) come d'altra parte le **Stelle** (S_2) e (S_3) trovandosi esternamente al **LSR** ribaltano il segno del moto proprio (in effetti si ha un aumento della longitudine galattica). In sostanza sulla base delle considerazioni viste poco fa i moti propri di tutte le **Stelle** per effetto della rotazione differenziale mostrerebbero sempre moti propri positivi (aumento generalizzato delle longitudini galattiche) tranne che per le **Stelle** con $l=90^\circ$ e $l=270^\circ$ in cui i moti propri relativi sono nulli. Tuttavia poiché le coordinate galattiche delle **Stelle** sono riferite ad un origine praticamente fissa, il sistema così come lo abbiamo descritto in **Figura 116** non è del tutto corretto in quanto l'origine delle coordinate lo abbiamo assunto appartenere ad un punto ideale del centro della **Galassia** indipendentemente dal fatto che questo punto visto da (S_0) si sposti rispetto ad uno sfondo di **Galassie** lontane.

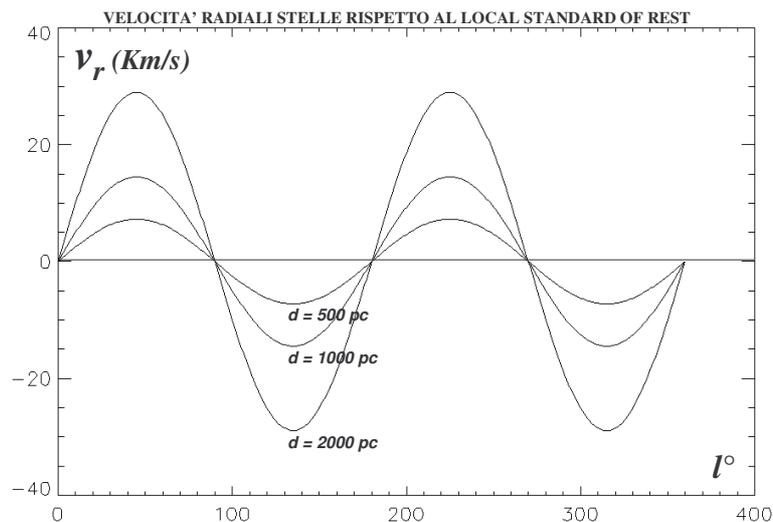


Fig. 117

Al solito, per meglio comprendere il concetto, consideriamo per un attimo che tutte le **Stelle** della **Galassia** ruotino come un corpo rigido intorno al suo centro. Questo significa che le distanze mutue delle **Stelle** rispetto al **LSR** non variano con il tempo.

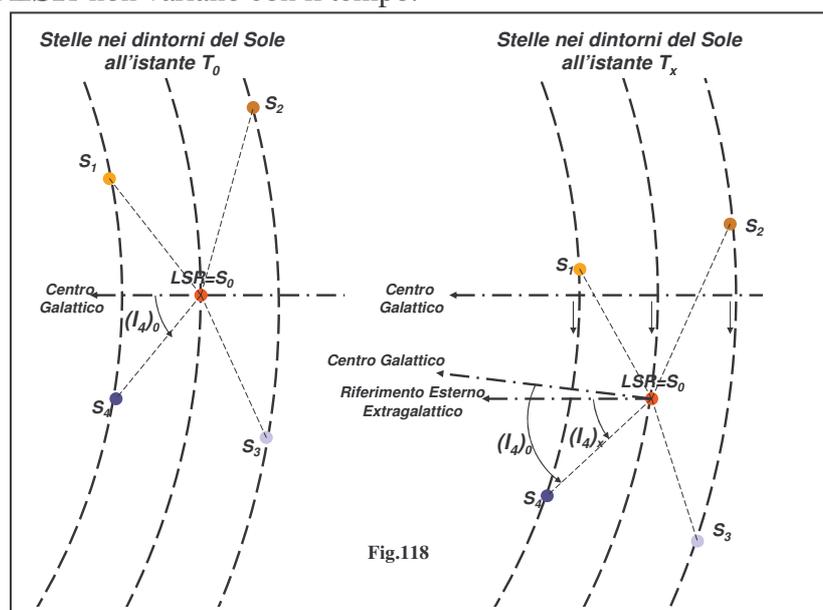


Fig.118

Infatti, se le cose stessero così, le **Stelle** (S_1), (S_2), (S_3) e (S_4) di **Figura 118** rivolterebbero solidalmente attorno alla **Galassia** mantenendo le distanze fisse sia tra di loro che rispetto a (S_0). Questa situazione rimarrebbe valida sia per l'istante T_0 (disegno a sinistra della **Figura 118**) che dopo un certo numero di anni all'istante T_x , quando tutto il sistema di **Stelle** avrebbe compiuto una rotazione di un certo angolo (disegno a destra). Come è possibile vedere dal grafico di destra della **Figura 118**, ad esempio, la longitudine della **Stella** (S_4) sarebbe sempre la stessa se l'origine fosse scelta nel centro ideale della **Galassia** ($(l_4)_0 = (l_4)_x$). In realtà proprio per il fatto che tutto l'insieme di **Stelle** ruota di un certo angolo rispetto al centro, una **Galassia** esterna scelta come origine delle longitudini farà apparire il centro ideale della nostra **Galassia** in movimento in senso orario, per cui la longitudine di (S_4) rispetto a questo nuovo sistema di riferimento apparirà più piccola che nel caso precedente della quantità:

$$(\Delta l_4 = (l_4)_x - (l_4)_0).$$

Quindi, a prescindere dalla rotazione differenziale della **Galassia**, se le **Stelle** si muovessero come un corpo rigido attorno al centro mostrerebbero tutte dei moti propri relativi a (S_0) con valori **negativi**. Pertanto il moto proprio finale osservato sarà dato dalla composizione del moto proprio dovuto alla rotazione differenziale riferito al centro ideale della **Galassia** più il moto proprio dovuto solo all'effetto dello spostamento del centro della **Galassia** rispetto al riferimento esterno delle **Galassie lontane**. La somma di questi due moti propri (μ : moto proprio in longitudine) dà come risultato finale nuovamente un andamento a doppia senoide su tutte le longitudini, ma questa volta con valori prevalentemente negativi come mostrato in **Figura 119**. Il fatto che i moti propri siano prevalentemente negativi sta ad indicare che il moto proprio dovuto alla rotazione differenziale è meno determinante di quello dovuto alla rotazione galattica intesa come rotazione di un corpo rigido, che alla distanza del Sole ammonta a circa **0",0058 all'anno** in senso orario e cioè negativo (più avanti si darà la dimostrazione di come si è arrivati alla determinazione della doppia senoide).

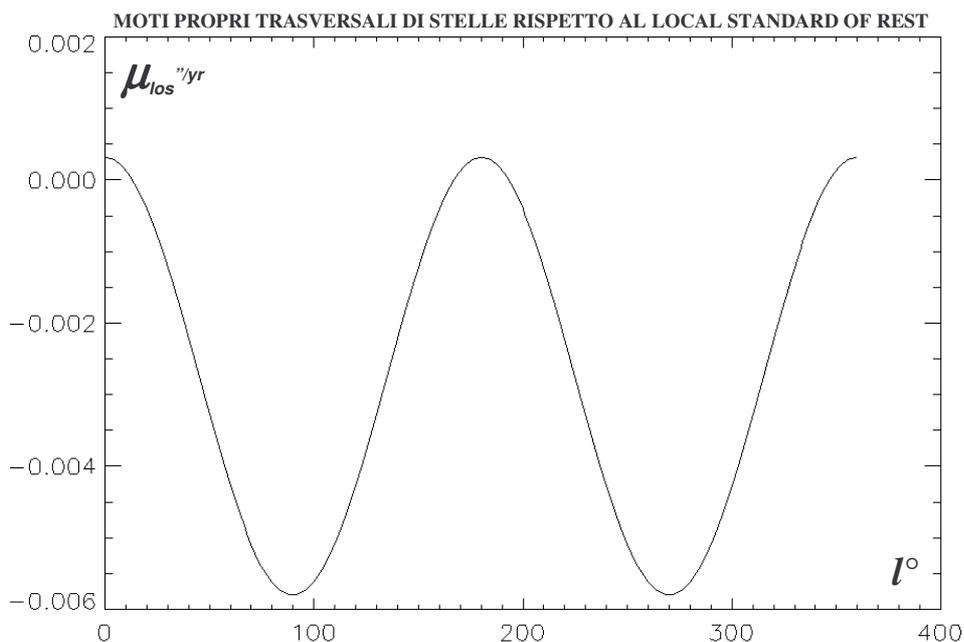
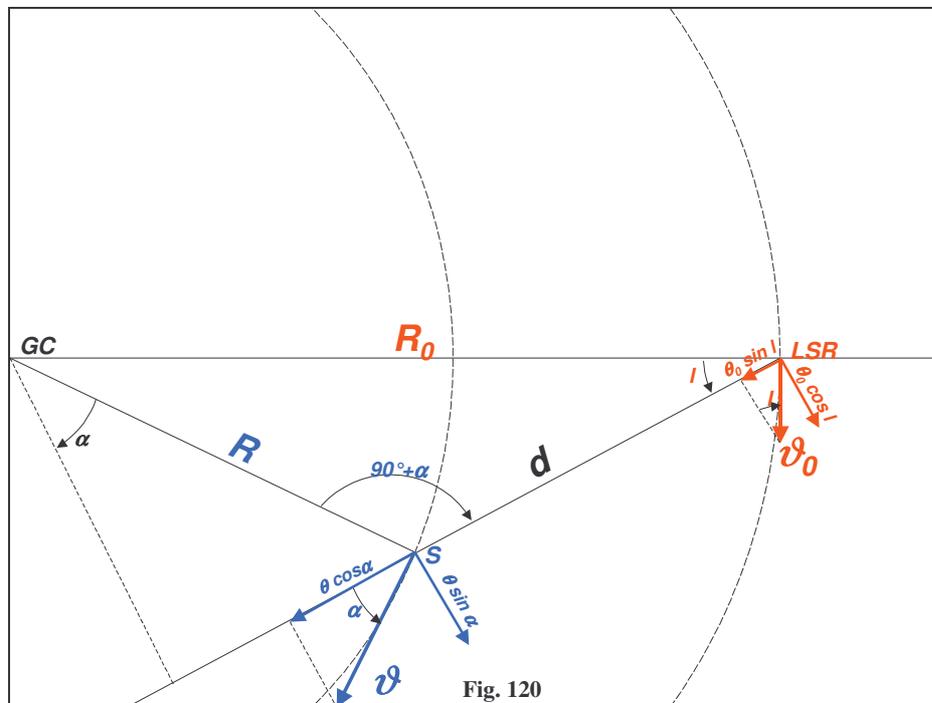


Fig. 119

Vediamo ora come si arriva alla determinazione delle formule che danno la velocità radiale v_R di una **Stella** rispetto al **LSR** da considerazioni puramente geometriche. Aiutiamoci con la **Figura 120** per comprendere meglio il problema. Immaginiamo di volere determinare la velocità radiale di una **Stella S** (priva di moto proprio peculiare) rispetto al **LSR** (anch'esso, per definizione, privo di **moto proprio peculiare**) dovuta esclusivamente al moto di rotazione differenziale della **Galassia**.



Sia l la longitudine galattica della **Stella S** rispetto al **LSR**, d la distanza tra il **LSR** e la **Stella S**, R_0 la distanza del **LSR** dal centro galattico **GC** ed R la distanza **Stella- Centro Galattico**. Sia inoltre v_0 la velocità tangenziale del **LSR** attorno al **GC**, v la velocità tangenziale della **Stella S** ed α un angolo ausiliario (non osservabile) che rappresenta la proiezione del vettore v lungo la linea di visione **LSR - S**. Come è possibile vedere dalla **Figura 120** il vettore velocità v della **Stella S** è più grande del vettore v_0 del **LSR** in quanto la **Stella S** è più vicina al centro galattico del **LSR**.

Poiché la velocità radiale v_R della **Stella** rispetto al **LSR** è data dalla differenza tra le proiezioni delle velocità v e v_0 lungo la linea di visione (*los*), utilizzando le classiche formule di trigonometria piana si arriva alla determinazione del valore di v_R nel seguente modo:

$$v_R = v \cdot \cos \alpha - v_0 \cdot \sin l$$

Applicando ora la legge dei seni al triangolo di **Figura 120** si ha che:

$$\frac{\sin(l)}{R} = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{R_0} = \frac{\cos(\alpha)}{R_0}$$

che sostituita nella precedente diventa:

$$v_R = \frac{v \cdot R_0}{R} \cdot \sin l - v \cdot \sin l$$

ma sapendo che le velocità angolari in **LSR** e in **S** sono date dalle relazioni:

$$\omega = \frac{v}{R} \quad \omega_0 = \frac{v_0}{R_0}$$

sostituite nella relazione precedente abbiamo:

$$v_R = (\omega - \omega_0) \cdot R_0 \cdot \sin l$$

Questa formula è corretta solo nel caso in cui si assumano orbite circolari in cui il valore di v_R viene preso con il segno positivo quando la **Stella** si allontana e negativo quando si avvicina.

Analoga formula per la velocità trasversale v_T della **Stella S** rispetto al **LSR** che assume la seguente forma (vedi **Figura 120**):

$$v_T = v \cdot \sin \alpha - v_0 \cdot \cos l$$

in cui è positiva nel verso delle longitudini galattiche l crescenti.
Cerchiamo di eliminare α anche da questa formula sapendo che :

$$R \cdot \sin \alpha = R_0 \cdot \cos l - d$$

per cui la precedente relazione diventa:

$$v_T = \frac{v}{R} \cdot (R_0 \cdot \cos l - d) - v_0 \cdot \cos l$$

da cui:

$$v_T = (\omega - \omega_0) \cdot R_0 \cdot \cos l - \omega \cdot d$$

Costanti di Oort

Le formule viste poco fa sono generali, nel senso che sono valide per qualsiasi distanza della **Stella** da noi (**LSR**) e dal centro della **Galassia**. Tuttavia una verifica sperimentale della correttezza di queste formule può essere condotta solo, nella banda ottica, su **Stelle** a distanze **d** da noi che non superino circa **2 Kparsec**, in quanto l'**Assorbimento Interstellare** del **Piano Galattico** oltre quelle distanze sarebbe eccessivo.

Conscio di questo fatto **Jan Oort nel 1927**, partendo dalle formule viste poc'anzi, realizzò delle formule approssimate che furono in grado di definire il moto di **Rotazione Differenziale della Galassia** per le **Stelle** nei dintorni del **Sole**, cioè a distanze da noi molto più piccole di quanto il **Sole** disti dal **Centro Galattico** ($d \ll R_0$).

Considerando la formula vista prima della velocità radiale:

$$v_R = (\omega - \omega_0) \cdot R_0 \cdot \sin l$$

se assumiamo R_0 ed l fissi, solo il termine $(\omega - \omega_0)$ dipende dalla distanza **d** della **Stella**. Poiché questa variazione è piccola possiamo usare un'espansione al primo ordine della serie di Taylor $f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0)^2 / 2 f''(x_0) + \dots$ nel seguente modo:

$$(\omega - \omega_0) \approx \left(\frac{d\omega}{dR} \right)_{R_0} \cdot (R - R_0)$$

ma:

$$\frac{d\omega}{dR} = \frac{d}{dR} \left(\frac{v}{R} \right) = \frac{1}{R} \cdot \frac{dv}{dR} - \frac{v}{R^2}$$

questa relazione generica alla distanza R_0 diventa:

$$\left(\frac{d\omega}{dR} \right)_{R_0} = \frac{1}{R_0} \cdot \left(\frac{dv}{dR} \right)_{R_0} - \frac{v_0}{R_0^2}$$

quindi la velocità radiale approssimata al primo ordine diventa:

$$v_R = (\omega - \omega_0) \cdot R_0 \cdot \sin l = \left[\left(\frac{dv}{dR} \right)_{R_0} - \frac{v_0}{R_0} \right] \cdot (R - R_0) \cdot \sin l$$

ma se assumiamo che **d** sia molto più piccolo di R_0 allora (vedi **Figura 120**) possiamo approssimare:

$$R_0 - R \approx d \cdot \cos l$$

che sostituita nell'equazione precedente diventa:

$$v_R = \left[\frac{v_0}{R_0} - \left(\frac{dv}{dR} \right)_{R_0} \right] \cdot d \cdot \sin l \cdot \cos l$$

Però dalla trigonometria sappiamo che $\sin l \cos l = 1/2 \sin 2l$. Quindi sostituendo questa equazione nella precedente ed isolando i termini costanti in un'unica costante **A** del tipo:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{v_0}{R_0} - \left(\frac{dv}{dR} \right)_{R_0} \right]$$

chiamata **Costante A di Oort**, in onore del suo ideatore, si ha che la relazione della velocità radiale di una **Stella** nei dintorni del Sole può finalmente essere espressa semplicemente nel seguente modo:

$$v_R = A \cdot d_{\text{Kpc}} \cdot \sin 2l$$

Usualmente le velocità radiali sono date in **Km/s** mentre le distanze sono date in **Kparsec** per cui le dimensioni della **Costante A di Oort** devono necessariamente essere in **Km/s per Kpc**. Questa formula ci fa comprendere ora il significato della doppia sinusoidale mostrata in **Figura 117** in cui i massimi valori positivi e negativi delle velocità radiali si hanno per longitudini galattiche pari a **45°**, **135°**, **225°**, **315°** in cui il $\sin(2l) = \pm 1$. Sempre la stessa formula ci fa capire che l'ampiezza della doppia sinusoidale dipende linearmente dalla distanza **d** come d'altra parte si è visto nelle curve a differenti distanze **d** riportate in **Figura 117**.

Pertanto questa semplice formula associata ad altre che tengono conto del moto peculiare del **Sole** e delle **Stelle** osservate, nonché della latitudine galattica **b** e del termine **K** che non rende simmetriche le velocità radiali medie delle **Stelle** che differiscono di 180° in longitudine, ci permette di stimare il valore della **costante A di Oort** (oltre ad altri parametri che analizzeremo più avanti). In particolare la stima della costante **A** ci viene fornita dalla osservazione spettroscopica delle velocità radiali di un certo numero di **Stelle** nei dintorni del Sole a differenti longitudini sul **Piano Galattico** e di cui si è riusciti a stimarne anche la distanza o per via trigonometrica o spettroscopica.

Vediamo di spiegare ora il significato della doppia sinusoidale generata dai moti propri trasversali delle **Stelle** riportata in **Figura 119**.

Partiamo dalla relazione della velocità trasversale vista prima:

$$v_T = (\omega - \omega_0) \cdot R_0 \cdot \cos l - \omega \cdot d$$

Come nel caso delle velocità radiali $(\omega - \omega_0) R_0$ si può scrivere:

$$(\omega - \omega_0) \cdot R_0 = \left[\left(\frac{dv}{dR} \right)_{R_0} - \frac{v_0}{R_0} \right] \cdot (R - R_0)$$

mentre $(\boldsymbol{\omega} \mathbf{d})$ può essere scritto nel seguente modo:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{d} = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{d} + (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) \cdot \mathbf{d}$$

ma assumendo che $(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0)$ sia molto piccolo possiamo ragionevolmente affermare che $(\boldsymbol{\omega} \mathbf{d}) \approx (\boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{d})$ quindi la \mathbf{v}_T diventa:

$$\mathbf{v}_T \approx \left[\left(\frac{d\vartheta}{dR} \right)_{R_0} - \frac{\vartheta_0}{R_0} \right] \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \cdot \cos l - \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{d}$$

ricordando inoltre che $(R_0 - R) \approx d \cos l$ la \mathbf{v}_T si può scrivere:

$$\mathbf{v}_T \approx \left[\frac{\vartheta_0}{R_0} - \left(\frac{d\vartheta}{dR} \right)_{R_0} \right] \cdot \mathbf{d} \cdot \cos^2 l - \frac{\vartheta_0}{R_0} \cdot \mathbf{d}$$

con le trasformazioni trigonometriche infine possiamo esprimere:

$$\cos^2 l = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2l)$$

infine si arriva alla formulazione definitiva:

$$\mathbf{v}_T \approx \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\vartheta_0}{R_0} - \left(\frac{d\vartheta}{dR} \right)_{R_0} \right] \cdot \mathbf{d} \cdot \cos 2l - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\vartheta_0}{R_0} + \left(\frac{d\vartheta}{dR} \right)_{R_0} \right] \cdot \mathbf{d}$$

in cui nella prima parentesi quadra è rappresentato il doppio del valore della costante **A** mentre nella seconda parentesi quadra, molto simile alla precedente salvo il segno cambiato, vi è rappresentato un valore costante uguale al doppio di quella che comunemente viene chiamata **Costante B di Oort**. Più precisamente il valore di **B** assume la forma :

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\vartheta_0}{R_0} + \left(\frac{d\vartheta}{dR} \right)_{R_0} \right]$$

Quindi la velocità trasversale \mathbf{v}_T può essere espressa mediante le **Costanti di Oort** dalla seguente relazione:

$$v_T = d_{\text{Kpc}} \cdot (A \cdot \cos 2l + B)$$

Dimensionalmente se la distanza d è in **Kpc** ed A in **Km/s/Kpc** anche la costante B è espressa in **Km/s per Kpc** da cui la velocità v_T in **Km/s**.

Ricordando che la velocità tangenziale in **Km/s** è legata al moto proprio μ_l dalla seguente relazione:

$$v_T = 4,74 \cdot \mu_l \cdot d_{\text{pc}} = 4,74 \cdot \mu_l \cdot d_{\text{Kpc}} \cdot 1000$$

eguagliando questa relazione alla precedente ed eliminando la distanza d in Kpc si ha:

$$\mu_l = \frac{A \cdot \cos 2l + B}{4,74 \cdot 1000}$$

in cui μ_l è espresso in secondi d'arco all'anno.

ATTENZIONE: questa formula può anche essere scritta come:

$$\mu_l = \frac{A \cdot \cos 2l + B}{4,74}$$

ma in questo caso **le costanti di Oort A e B in Km/s/Kpc debbono essere divise per 1000 per cui dimensionalmente si trasformano in Km/s/pc**

Poiché il μ_l è composto di due termini, come abbiamo visto prima (dovuto alla componente differenziale e alla rotazione del sistema di coordinate), che globalmente forniscono un valore prevalentemente negativo (vedi **Figura 119**), vuol dire che la costante B deve essere intrinsecamente negativa. Una importante constatazione che si può fare osservando l'equazione di μ_l è che essa risulta indipendente dalla distanza d .

Anche in questo caso l'osservazione dei moti propri di **Stelle** nei dintorni del **Sole** può portare alla determinazione delle costanti A e B tramite la soluzione di un sistema a minimi quadrati in cui ovviamente le incognite sono le costanti di **Oort**.

Un altro importante risultato che si può ottenere sfruttando la conoscenza delle costanti A e B è la determinazione della velocità angolare ω_0 di rotazione del **LSR** intorno al **Centro Galattico**. Infatti dalla differenza delle **Costanti di Oort** si ottiene:

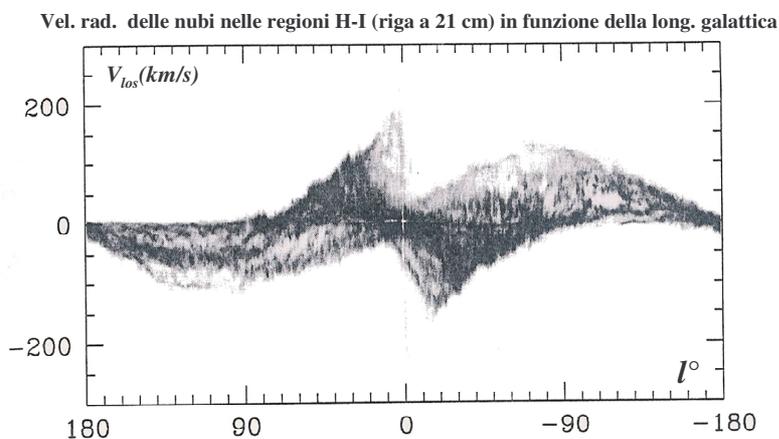
$$A - B = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{v_0}{R_0} - \left(\frac{dv}{dR} \right)_{R_0} \right] + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{v_0}{R_0} + \left(\frac{dv}{dR} \right)_{R_0} \right] = \frac{v_0}{R_0} = \omega_0$$

mentre la somma presa con il segno negativo :

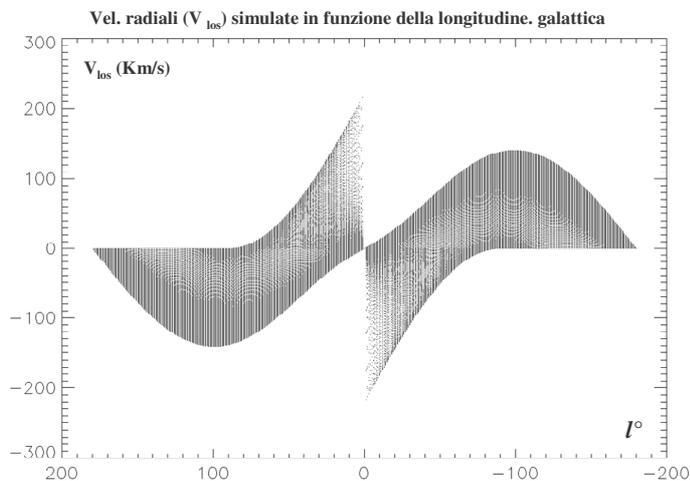
$$-(A + B) = -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{v_0}{R_0} - \left(\frac{dv}{dR} \right)_{R_0} \right] + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{v_0}{R_0} + \left(\frac{dv}{dR} \right)_{R_0} \right] = \left(\frac{dv}{dR} \right)_{R_0}$$

fornisce la variazione della velocità tangenziale con la distanza.

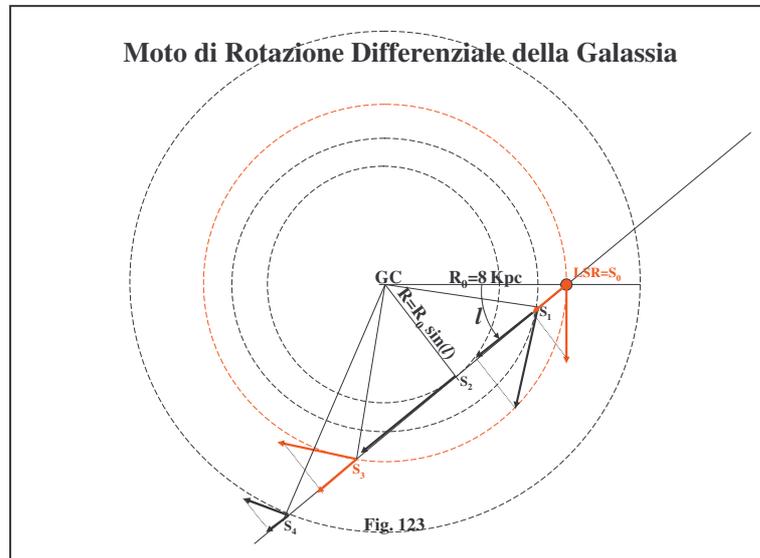
Abbiamo visto in **Figura 117** la rappresentazione grafica delle velocità radiali (V_{los}) rispetto al **LSR** delle stelle vicine ottenuta tramite l'utilizzo della formula di Oort.. Tuttavia, quando le osservazioni si estendono a distanze considerevoli, fino a una decina di **Kpc** dal **LSR**, la formulazione di Oort non è più attendibile. Infatti l'osservazione in banda radio della riga di emissione a **21 cm** delle nubi di idrogeno nelle regioni **H-I** del piano galattico permette di valutare le velocità radiali delle nubi (per effetto Doppler) anche a grandi distanze da noi. La distribuzione reale di queste velocità lungo tutte le longitudini galattiche (vedi **Figura 121**) ci fa vedere una distribuzione molto diversa da quella riportata in **Figura 117**, ottenuta con la formulazione di Oort. La ragione di questa diversità risiede proprio nel fatto che le formule di Oort sono attendibili solo nel caso in cui le distanze delle stelle osservate siano confinate entro un paio di **Kpc** dal **LSR**.



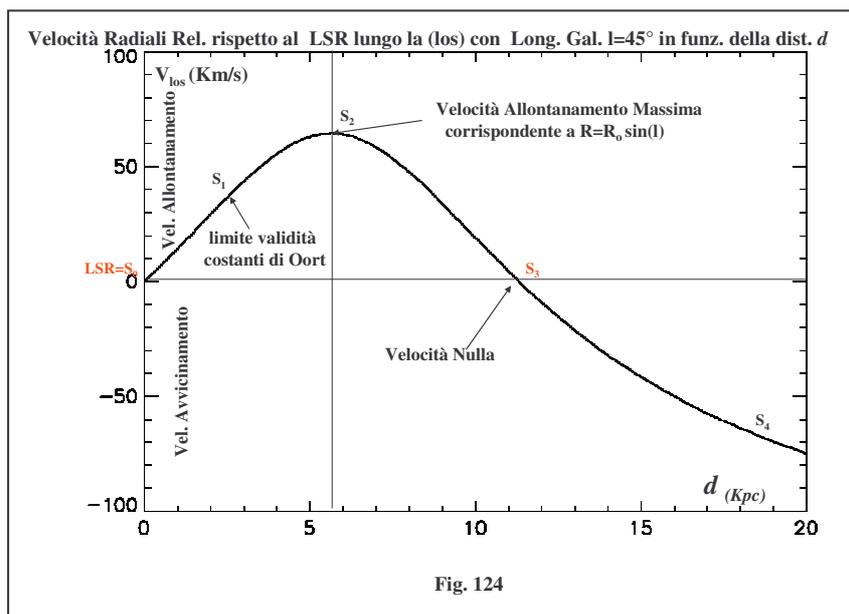
Una distribuzione come quella riportata in **Figura 121** può essere ottenuta assumendo che le velocità rotazionali galattiche delle stelle entro una decina di Kpc dal Sole (esclusa la direzione verso il centro galattico) siano pressoché costanti e cioè che abbiano una velocità di circa 220 Km/s come è possibile dedurre dalla **Figura 98**. Ponendo queste condizioni si ottiene la distribuzione riportata in **Figura 122** che è molto simile a quella osservata



Considerazioni analoghe possono essere fatte per descrivere l'andamento delle velocità radiali relative rispetto al **Local Standard of Rest** di oggetti pertinenti ad una fissata longitudine galattica ma posti a qualsiasi distanza d da esso. Infatti se per esempio consideriamo le velocità radiali relative rispetto al **LSR** di oggetti che stanno tutti alla stessa longitudine galattica di $l=45^\circ$ ma posti a distanze d molto differenti tra di loro si ha una situazione simile a quella espressa con i punti S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 della **Figura 123**.



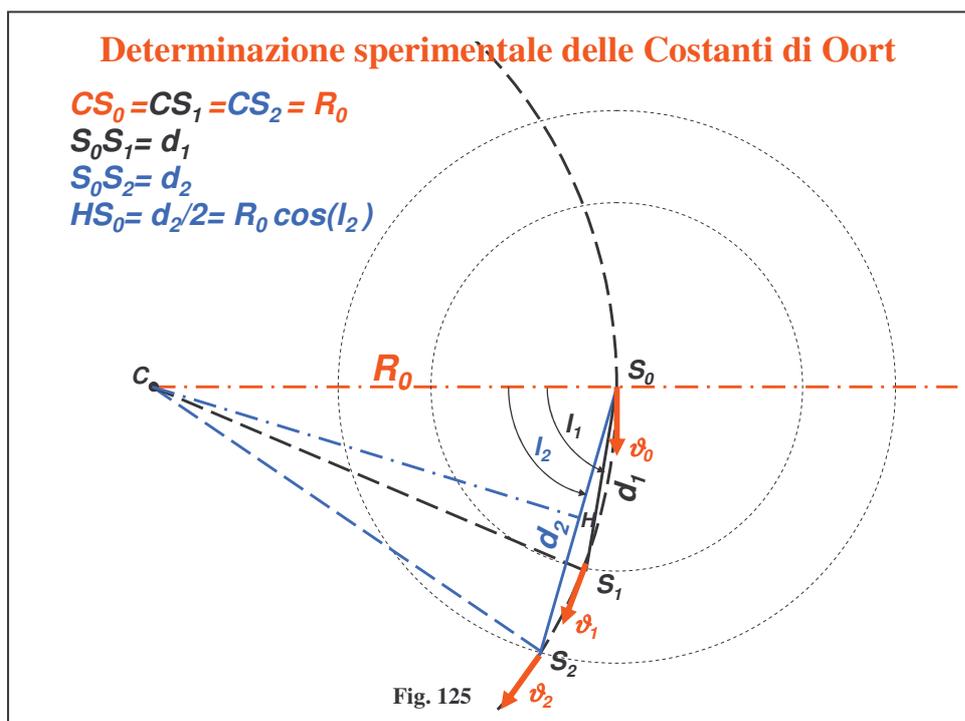
Assumendo, per quanto visto prima, un andamento della velocità rotazionale della galassia più o meno costante secondo quella direzione, è possibile stimare punto per punto le velocità radiali relative rispetto al **LSR**. Queste sono nulle per oggetti molto vicini al LSR (**punto S₀ di Figura 123 e 124**), ma tendono a crescere linearmente (velocità di allontanamento), in accordo con la formulazione di Oort, entro **due o 3 Kpcs** di distanza (**punto S₁ sempre delle stesse due Figure**), per raggiungere il massimo valore in **S₂** avente una distanza $R = R_0 \sin(l)$ dal centro galattico di circa **6 Kpc**, e quindi fuori dai limiti imposti dalla formulazione di Oort. Passato questo punto, le velocità radiali di allontanamento tendono a decrescere fino ad arrivare al punto **S₃** in cui la velocità si annulla per poi mostrare velocità di avvicinamento (negative) via via crescenti con l'aumentare della distanza (**punto S₄**)



Determinazione sperimentale delle Costanti di Oort

Tutto quello che è stato detto nel paragrafo precedente si riferiva alla formulazione teorica del modello di rotazione galattica nei dintorni del **Sole** basato sulle velocità radiali e sui moti propri delle **Stelle**. Tuttavia il modello teorico escogitato da **Oort e Lindblad**, che ha condotto alla formulazione delle costanti di **Oort A e B**, si basava sul fatto che il punto di osservazione delle **Stelle** non era situato sul **Sole** ma sul **Local Standard of Rest**, che come sappiamo è assimilabile ad un **Sole** fittizio che si muove su di un'orbita praticamente circolare attorno al centro della **Galassia** alla distanza e posizione che occupa effettivamente il **Sole vero** rispetto al **Centro Galattico**. La stessa considerazione è stata fatta per le **Stelle** che sono state prese in considerazione come se fossero dotate solo di un moto tangenziale intorno al centro ma prive di **moti propri peculiari**. In altri termini sia il **Sole** che le **Stelle** sono stati assimilati a degli oggetti, privi di **moti propri peculiari**, che orbitano circolarmente intorno al centro della **Galassia** seguendo in pratica le leggi del moto kepleriano.

Questa trattazione semplicistica della rotazione differenziale della **Galassia** può andare bene solo se si considerino trascurabili i moti propri peculiari delle **Stelle** e del **Sole**, e se le **Stelle** si trovino entro un raggio di circa **1 Kparsec** dal **Sole** ed abbiano una latitudine galattica $b=0^\circ$ (cioè che stiano sul **Piano Galattico**). Evidentemente questa situazione così favorevole, nella realtà non si verifica mai, in quanto, a prescindere dai **moti propri peculiari** del **Sole** e delle **Stelle** e dalla posizione di queste rispetto al **Piano Galattico**, spingendosi a distanze ben più grandi del **Kparsec** ($R_0/d < 10$) le velocità radiali delle **Stelle**, poste tutte alla stessa distanza R_0 dal centro galattico, con longitudini galattiche pari a $l=90^\circ$ e $l=270^\circ$ non si annullano come nel caso della **Figura 117**. In effetti la curvatura dell'orbita fa sì che le longitudini delle **Stelle** lontane tendano ad essere leggermente più grandi di 270° rispetto al caso di **Stelle** vicine con $l=270^\circ$ e leggermente più piccole di 90° nel caso di $l=90^\circ$, al fine di avere per queste longitudini delle velocità radiali relative nulle. E' possibile dimostrare analiticamente che queste piccole variazioni di longitudine esistenti tra **Stelle** vicine e lontane appartenenti alla stessa orbita sono dipendenti dalla distanza delle **Stelle** dal **LRS**



A questo scopo consideriamo la **Figura 125** in cui si abbiano 3 oggetti tutti sulla stessa orbita a distanza R_0 dal **Centro Galattico**:

S_0 coincidente con il **LSR**, S_1 a distanza d_1 dal **LSR** e S_2 a distanza d_2 . Chiaramente le **Stelle** S_1 e S_2 viste da S_0 avendo velocità tangenziali uguali, perché sulla stessa orbita, mostrano velocità relative nulle. Mentre la longitudine galattica della **Stella** S_1 risulta prossima ai 90° quella di S_2 si discosta maggiormente dai 90° e questo scostamento è tanto maggiore quanto più grande è la distanza della **Stella** da S_0 .

Infatti se ad esempio si traccia la bisettrice dall'angolo $S_0C S_2$ questa incontrerà il lato $S_0S_2=d_2$ nel punto di mezzo H formando due triangoli rettangoli uguali $S_0C H$ e $S_2C H$ tali per cui vale la relazione:

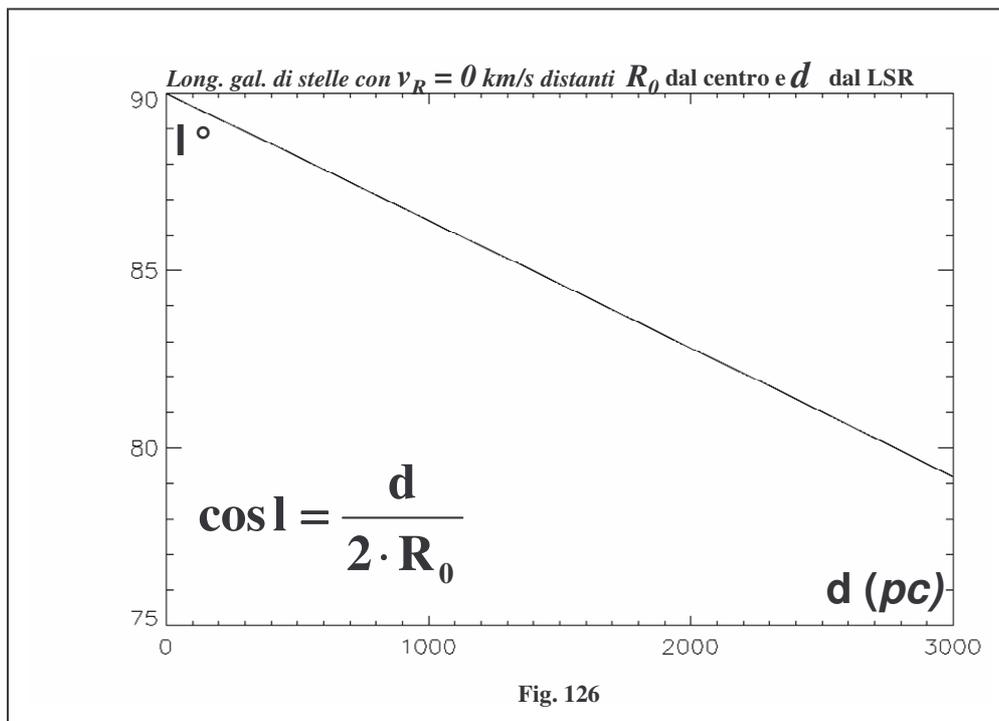
$$\cos l_2 = \frac{d_2}{2 \cdot R_0}$$

o più in generale, per una qualsiasi **Stella** sull'orbita di S_0 sarà:

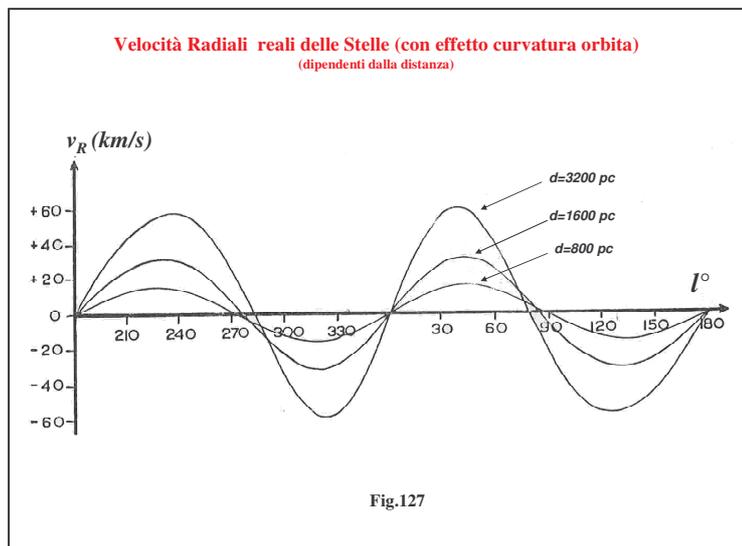
$$\cos l = \frac{d}{2 \cdot R_0}$$

Graficando l in funzione di d con la formula precedente si ha la situazione rappresentata in **Figura 126** in cui è possibile vedere come diminuisce linearmente il valore della longitudine galattica di una **Stella** con $v_R=0 \text{ Km/s}$ appartenente all'orbita di S_0 (**LSR**), man mano che aumenta la distanza d .

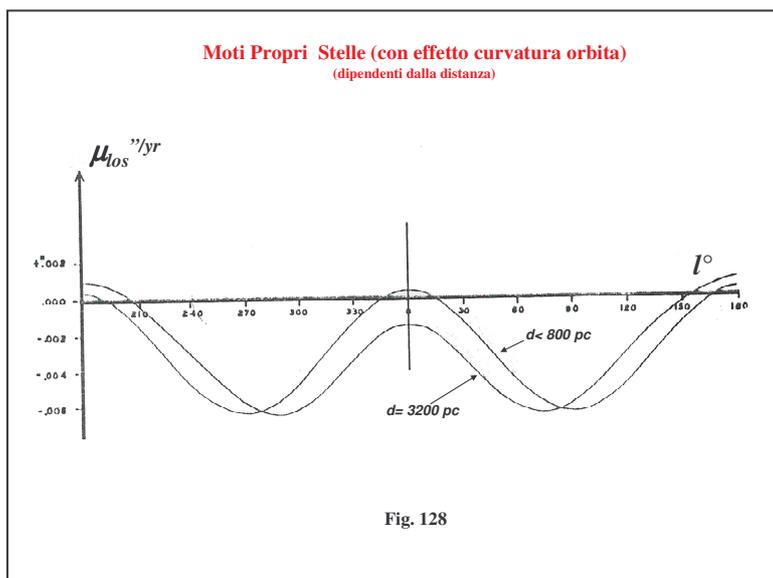
Con questa formula, in via teorica, sarebbe possibile calcolare la distanza R_0 una volta note le velocità radiali (nulle in questo caso) di queste particolari **Stelle** coorbitanti con il **LSR** delle quali si è riusciti a stimarne anche la distanza d da noi.



In conseguenza di questa variazione di longitudine succede che le doppie sinusoidi di **Figura 117** vengono alterate, nel senso che tutte queste curve annulleranno la propria velocità radiale a $l=0^\circ$ e a $l=180^\circ$, mentre intorno a $l=90^\circ$ avranno una velocità radiale nulla a $l=83^\circ$ per $d=2000 pc$, a $l=86^\circ$ per $d=1000 pc$ e a $l=88^\circ$ per $d=500 pc$. Situazione diametralmente opposta intorno a $l=270^\circ$ in cui le v_R si annullano per $l=277^\circ$ a $d=2000 pc$ per $l=274^\circ$ a $d=1000 pc$ e per $l=272^\circ$ a $d=500 pc$ (vedi **Figura 127** in cui sono riportate altre distanze).



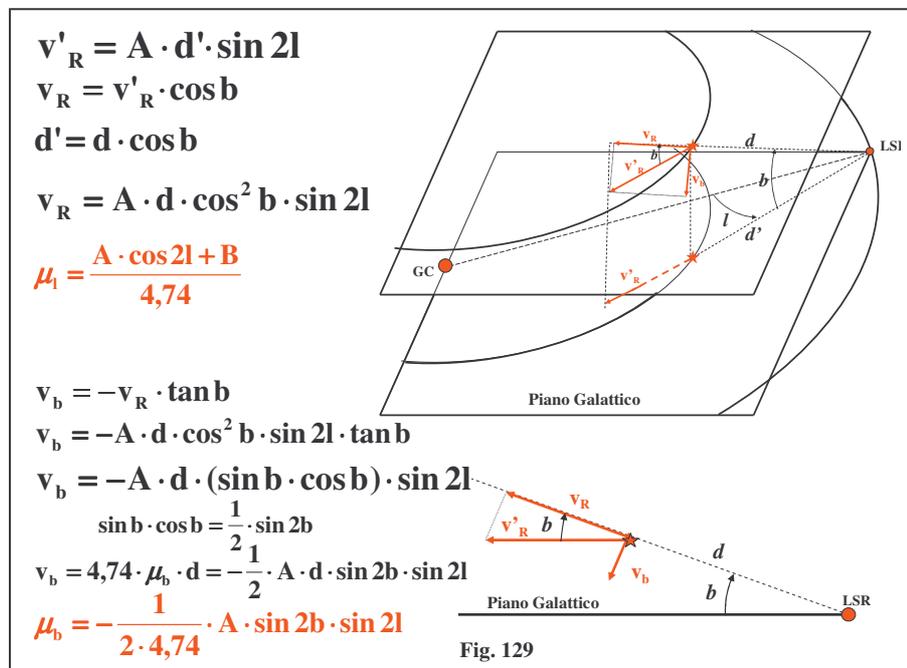
Per quanto riguarda i moti propri trasversali visti prima (**Figura 119**) la doppia sinusoida risultava indipendente dalla distanza d della **Stella** da noi. In realtà con l'effetto della curvatura dell'orbita questa sinusoida subisce delle modifiche, nel senso che per **Stelle** molto vicine a noi le ampiezze e le fasi di queste curve rimangono inalterate e apparentemente indipendenti dalla distanza, mentre se le distanze aumentano fino a qualche **Kparsec** si ha un abbassamento progressivo e sistematico della curva con il massimo sempre a $l=0^\circ$ e a $l=180^\circ$ ma con i minimi spostati verso longitudini decrescenti intorno a $l=90^\circ$ e longitudini crescenti intorno a $l=270^\circ$ in modo del tutto analogo a quanto visto poco fa per le velocità radiali(vedi **Figura 128**).



Come abbiamo visto, le formule di **Oort** permetterebbero di calcolare le velocità radiali e i moti propri trasversali di **Stelle** che stanno esattamente sul **Piano Galattico** con $b=0^\circ$. Ma se le **Stelle** non stessero esattamente sul **Piano Galattico** ed avessero una $b \neq 0^\circ$?

In questo caso si dimostra che le formule canoniche di **Oort** possono essere messe in una forma più generale che contempla anche il caso di oggetti fuori dal **Piano Galattico**. Proprio per il fatto che le **Stelle** possono essere fuori dal **Piano Galattico** si deve prendere in considerazione anche la componente del moto proprio lungo la direzione delle latitudini b (perpendicolare alla componente trasversale μ_l).

Facendo riferimento alla **Figura 129** immaginiamo di prendere in considerazione una **Stella** fuori dal **Piano Galattico**, ma non eccessivamente distante dal **LSR**, di coordinate galattiche (l, b) e a distanza d da questo punto. Il moto di rotazione galattico della **Stella** supponiamo avvenga secondo un piano parallelo all'Equatore Galattico con una componente di velocità radiale v'_R relativa al **LSR** e parallela al suddetto piano. Questa componente di velocità radiale si proietta sulla linea di vista **LSR - Stella** secondo la seguente relazione (vedi **Figura 129**):



$$v_R = v'_R \cdot \cos b$$

Tuttavia se proiettassimo la **Stella** sul **Piano Galattico** la **Stella** fittizia che si verrebbe a creare sul piano avrebbe una distanza d' dal **LSR** e mostrerebbe una velocità radiale relativa v'_R uguale a quella vera.

Pertanto trattando questa **Stella** fittizia come una **Stella** del piano possiamo applicare la prima relazione di **Oort** vista precedentemente nel seguente modo:

$$v'_R = A \cdot d'_{\text{Kpc}} \cdot \sin 2l$$

D'altra parte la distanza d' è legata dalla relazione (vedi **Figura 129**):

$$d' = d \cdot \cos b$$

Quindi la v_R con le relazioni viste poco fa diventa

$$v_R = A \cdot d \cdot \cos^2 b \cdot \sin 2l$$

Per quanto concerne la componente tangenziale, il **Moto Proprio Trasversale** di **Stelle** fuori dal **Piano Galattico** ha un'espressione uguale a quella delle **Stelle** del piano, in quanto non subisce alterazioni con il variare di b , per cui la relazione resta sempre:

$$\mu_1 = \frac{A \cdot \cos 2l + B}{4,74 \cdot 1000}$$

Tuttavia la componente radiale di **Stelle** fuori dal **Piano Galattico** viste dal **LSR** dà luogo anche ad una componente tangenziale del **Moto Proprio** lungo il meridiano delle latitudini galattiche che chiameremo μ_b e che è normale a μ_l .

Per quantificare questo moto proprio consideriamo la componente tangenziale della velocità radiale v_R che chiameremo v_b (vedi **Figura 129**). Questa può essere scritta come:

$$v_b = -v_R \cdot \tan b$$

sostituendo la v_R trovata prima si ha

$$v_b = -A \cdot d \cdot \cos^2 b \cdot \sin 2l \cdot \tan b$$

semplificando si ha:

$$v_b = -A \cdot d \cdot (\sin b \cdot \cos b) \cdot \sin 2l$$

ma sapendo che:

$$\sin b \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot \sin 2b$$

la precedente diventa ricordando la relazione che lega le velocità tangenziali con i moti propri:

$$v_b = 4,74 \cdot \mu_b \cdot d_{\text{Kpc}} \cdot 1000 = -\frac{1}{2} \cdot A \cdot d_{\text{Kpc}} \cdot \sin 2b \cdot \sin 2l$$

messa in forma definitiva il moto proprio dovuto alla componente tangenziale della velocità radiale diventa:

$$\mu_b = -\frac{1}{2 \cdot 4,74 \cdot 1000} \cdot A \cdot \sin 2b \cdot \sin 2l$$

Da questa formula si evince che il massimo valore (in senso assoluto) che può assumere il μ_b si ha quando sia b che l assumono il valore di 45° oppure questo valore aumentato con multipli di 90° tale per cui i seni del doppio di l e b assumano i valori ± 1 .

Come abbiamo detto all'inizio di questo paragrafo le formule di **Oort** partono dal presupposto che le **Stelle** siano nei dintorni del **Sole** e che non abbiano velocità peculiari ma solo rotazionali intorno al **Centro Galattico** come il **LSR**. Nella realtà osservativa le velocità radiali misurate dal **Sole** contengono una serie di effetti che non consentono di utilizzare direttamente le formule di **Oort**.

Sinteticamente gli effetti sulle velocità radiali osservate sono:

- l'effetto del moto solare riflesso sul **LSR** che si ripercuote anche sulle **Stelle**
- l'effetto di rotazione differenziale della galassia esistente tra un gruppo di **Stelle** lontane da noi ma vicine tra di loro dotate di moto medio peculiare nullo ed il **LSR** (assimilabile a **Stelle** molto vicine al Sole con moto medio peculiare nullo)
- l'effetto della velocità peculiare della **Stella** osservata rispetto al **LSR Locale** del gruppo di **Stelle** vicine a quella in questione
- l'effetto dovuto alla asimmetria dei moti radiali stellari in direzioni galattiche diametralmente opposte e che viene generalmente indicato come “**Termine K**”.

Pertanto alla luce di quanto appena esposto la velocità radiale osservata di una **Stella** può scriversi nella seguente forma:

$$v_R = K - s_0 \cdot \cos B_0 \cdot \cos b \cdot \cos(l - L_0) - s_0 \cdot \sin B_0 \cdot \sin b + A \cdot d \cdot \cos^2 b \cdot \sin 2l + v_{rp}$$

dove con **K** si indica il “**Termine K**”, **d** la distanza della **Stella** dal **LSR**, **(l,b)** le coordinate galattiche della **Stella**, **s₀** è la velocità del **Sole** rispetto al **LSR**, **(L₀, B₀)** le coordinate galattiche dell'**Apice Solare**, **A** la prima costante di **Oort** e **v_{rp}** la velocità radiale peculiare della **Stella** lungo la linea di vista e rispetto al suo **LSR Locale**.

Osservando le velocità radiali di **n Stelle** si avranno tante equazioni di condizione quante sono le **Stelle** osservate, nelle incognite **K**, **s₀**, **L₀**, **B₀** e **A**. Di queste equazioni invece le coordinate **(l,b)** sono note, come pure le distanze **d**, mentre il valore medio di **v_{rp}** su di un certo numero di **Stelle** potendosi considerarsi nullo ci permette di poter togliere ogni termine **v_{rp}** dalle equazioni senza pregiudicare l'attendibilità delle altre incognite.

Poiché questi sistemi di equazioni sono non lineari si possono mettere sotto forma lineare introducendo delle incognite ausiliarie e sapendo dalla trigonometria che

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta :$$

$$x_1 = K$$

$$x_2 = -s_0 \cdot \cos B_0 \cdot \cos L_0$$

$$x_3 = -s_0 \cdot \cos B_0 \cdot \sin L_0$$

$$x_4 = -s_0 \cdot \sin B_0$$

$$x_5 = A$$

L'equazione di condizione precedente diventa:

$$v_R = x_1 + x_2 \cdot \cos b \cdot \cos l + x_3 \cdot \cos b \cdot \sin l + x_4 - s_0 \cdot \sin b + x_5 \cdot d \cdot \cos^2 b \cdot \sin 2l$$

Le **n** equazioni ricondotte in forma lineare nelle incognite **x₁**, **x₂**, **x₃**, **x₄** e **x₅** possono essere risolte tramite la soluzione convenzionale di un sistema di equazioni lineari ai minimi quadrati.

Dalle incognite x_i è possibile risalire alle incognite originali. I valori di A e di K sono immediatamente definiti, il valore di L_o lo si può ricavare dal rapporto di x_3/x_2 , mentre il valore di B_o lo si ricava da x_4/x_3 ed s_o indifferentemente da x_2, x_3, x_4 .

Un simile procedimento analogo a quello delle velocità radiali può essere fatto per i **moti propri trasversali**. Considerando gli stessi effetti visti nel caso delle velocità radiali a parte l'effetto del **Termine K**, che in questo caso non centra, le equazioni di condizione si possono scrivere nel seguente modo:

$$\mu_1 \cdot \cos b = \frac{s_o}{4,74 \cdot d_{Kpc} \cdot 1000} \cdot \cos B_o \cdot \sin(1 - L_o) + \frac{B}{4,74} \cdot \cos b + \frac{A}{4,74} \cdot \cos b \cdot \cos 2l + \frac{t_{ip}}{4,74 \cdot d_{Kpc} \cdot 1000}$$

In questo caso le incognite sono le stesse adottate per le velocità radiali (s_o, L_o, B_o e A) più la costante B di **Oort**. Il termine t_{ip} rappresenta la velocità peculiare (casuale) in longitudine in Km/s, ma come nel caso delle velocità radiali essendo il valore medio di queste velocità nullo si può omettere nel sistema di equazioni.

Essendo anche queste delle equazioni non lineari si ricorre al solito sistema delle incognite ausiliarie del tipo:

$$y_1 = \frac{s_o}{4,74} \cdot \cos B_o \cdot \cos L_o$$

$$y_2 = -\frac{s_o}{4,74} \cdot \cos B_o \cdot \sin L_o$$

$$y_3 = \frac{B}{4,74}$$

$$y_4 = \frac{A}{4,74}$$

Con le incognite ausiliarie l'equazione precedente diventa:

$$\mu_1 \cdot \cos b = y_1 \cdot \frac{\sin l}{d_{Kpc} \cdot 1000} + y_2 \cdot \frac{\cos l}{d_{Kpc} \cdot 1000} + y_3 \cdot \cos b + y_4 \cdot \cos b \cdot \cos 2l$$

Al solito di queste equazioni ne abbiamo n per cui le incognite y_1, y_2, y_3, y_4 possono essere ottenute dalla soluzione di un sistema di equazioni lineari ai minimi quadrati. Una volta ottenute le y_i (dove $i=1,4$), dal rapporto y_2/y_1 si ottiene il valore di L_o che inserito nella y_1 permette di mettere s_o in funzione di B_o che a sua volta inserito in y_2 permette di calcolare separatamente le incognite s_o e B_o . Invece il calcolo delle costanti di **Oort** A e B è immediato in quanto dipendono solo dalla costante **4,74**.

Con le velocità radiali e i moti propri trasversali si possono calcolare in maniera indipendente: la velocità del **Sole** s_o rispetto al **LSR**, le coordinate galattiche dell'**Apice Solare** (L_o, B_o) e le costanti di **Oort** A e B (quest'ultima solo con i moti propri). Tuttavia il metodo delle velocità radiali è molto più accurato di quello dei moti propri in quanto questi sono soggetti a errori sistematici che variano con la posizione delle **Stelle** che mascherano l'effetto della rotazione differenziale della Galassia. Comunque sia i moti propri risultano importanti perché sono l'unico mezzo con cui poter determinare il valore della costante B di **Oort**. Recenti stime delle costanti di **Oort** (1997) danno per la costante A il valore di $14,8 \pm 0,8 \text{ Km/s/Kpc}$, mentre per la costante B il valore $-12,4 \pm 0,6 \text{ Km/s/Kpc}$.

APPENDICE A

L'Eccesso Sferico delle Superfici su di una Sfera

Quante volte abbiamo sentito dire che un appezzamento di terreno quadrato di 1 ettaro corrisponde praticamente ad un quadrato di 100 metri per 100 m, cioè a 10.000 metri quadrati? Ebbene ad essere rigorosi, un campo di grano, di queste dimensioni ha una superficie leggermente superiore ai 10.000 metri quadri. La ragione di ciò risiede nel fatto che la superficie terrestre non è piatta ma approssimativamente sferica per cui le aree risultano sottostimate se basate solo sulla misura delle lunghezze dei lati degli appezzamenti di terreno.

Per comprendere meglio il problema supponiamo, per il momento, di prendere una sfera di raggio unitario e di tagliarla con 4 cerchi massimi in modo da delineare sulla sua superficie una zona apparentemente quadrata di lati (misurati sulla sfera) uguali tra di loro tali che gli angoli al vertice dei lati visti dal centro **O** della sfera (coincidenti con i lati stessi) siano (vedi **Figura 1A**):

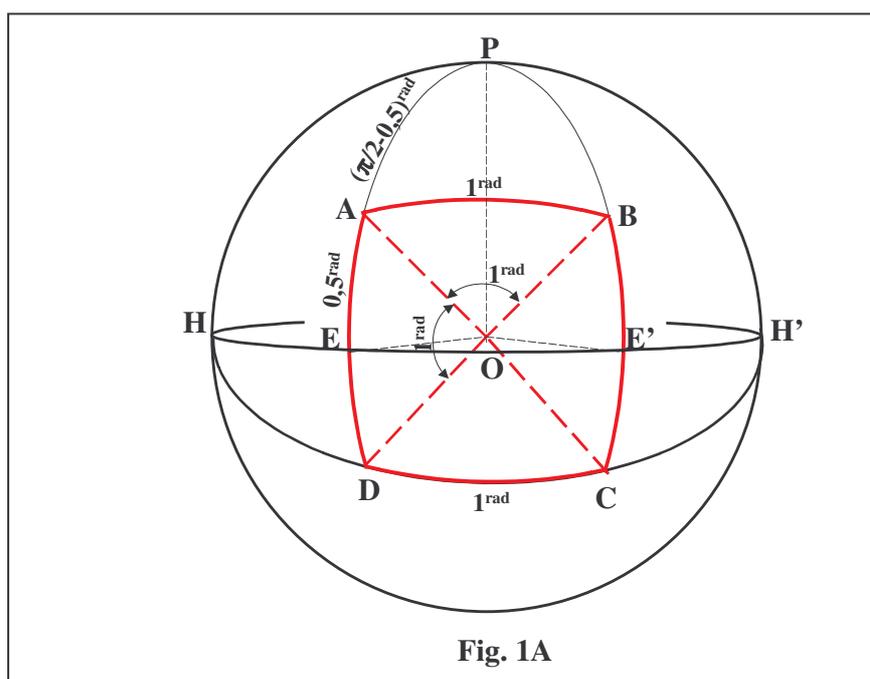
$$AB = BC = CD = DA = 1 \text{ radiante}$$

$$A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = D\hat{O}A = 1 \text{ radiante}$$

e tali che i punti **E** ed **E'** appartengano al cerchio massimo che biseca i cerchi massimi passanti per **AB** e **CD**, assumendo nel contempo la perpendicolarità del cerchio passante per **HEE'H'** con il cerchio **HPH'**.

In questa maniera l'arco di cerchio **EA=E'B=ED=E'C** corrisponderà a metà lato cioè a:

$$EA = E'B = ED = E'C = 0,5 \text{ radianti}$$



A questo punto abbiamo i mezzi per calcolarci l'area in steradiani (o gradi quadrati) della superficie **ABCD**, determinando dapprima l'area del triangolo sferico **PDC** e quindi l'area del triangolo **PAB** che sottratta alla precedente fornisce l'area della superficie quadrata (sulla sfera).

Del triangolo **PAB** si conoscono i tre lati:

$$AP = BP = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \text{ radianti} \quad \text{e} \quad AB = 1 \text{ radiante}$$

Per calcolare l'area del triangolo **PAB** abbiamo bisogno dei tre angoli nei vertici **A**, **P** e **B**.

Gli angoli in **A** e **B** si ricavano dalla seguente formula (**prima formula fondamentale triangoli sferici**):

$$\cos \hat{A} = \frac{\cos BP - \cos AP \cos AB}{\sin AP \sin AB} \quad \text{da cui} \quad \hat{A} = \hat{B} = 1,2677319 \text{ rad} = 72^\circ,64$$

mentre l'angolo in **P** si ricava sempre dalla **prima formula dei triangoli sferici**:

$$\cos \hat{P} = \frac{\cos AB - \cos AP \cos BP}{\sin AP \sin BP} \quad \text{da cui} \quad \hat{P} = 1,1558868 \text{ rad} = 66^\circ,23$$

Quindi l'area del triangolo **APB** è data da :

$$S_{APB} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{P} - \pi = 0,54975782 \text{ steradiani}$$

L'area del triangolo **DPC** si ricava immediatamente sapendo che gli angoli in **D** e in **C** sono uguali tra di loro e differiscono di π dagli angoli in **A** e **B** calcolati prima secondo la relazione:

$$\hat{C} = \hat{D} = \pi - \hat{A} = \pi - \hat{B} = 1,8738608 \text{ rad} = 107^\circ,36$$

per cui l'area del triangolo **DPC** sarà:

$$S_{DPC} = \hat{D} + \hat{C} + \hat{P} - \pi = 1,7620157 \text{ steradiani}$$

Quindi dalla differenza delle due aree si ha l'area della superficie quadrata **ABCD** sulla sfera:

$$S_{ABCD} = S_{DPC} - S_{APB} = 1,2122579 \text{ steradiani}$$

Quindi la suddetta area di **1 radiante per 1 radiante** indurrebbe a pensare che la sua superficie sia di uno **steradiante** (un radiante al quadrato), invece, per l'**Eccesso Sferico** ammonta a **1,2122579** steradiani con una eccedenza quindi di **0,2122579** steradiani pari a **696,80 gradi quadrati in più**.

Ovviamente più l'area è piccola e meno si sente l'effetto dell'**Eccesso Sferico** in quanto la superficie sferica tende ad approssimarsi ad un piano.

Infatti per una lastra fotografica che copre un'area di cielo di **1° per 1°**, utilizzando delle stesse formule viste sopra, scalando però i lati del quadrato a 1 grado, si avrà un **Eccesso Sferico** di soli **0,0000508** gradi quadrati in più (corrispondenti ad un quadrato sferico di **26 secondi** d'arco di lato).

Ritornando alla domanda principale e cioè di quanto aumenta la superficie di un ettaro per via dell'**Eccesso Sferico** occorre ricordare che il lato del quadrato sul terreno di **100 metri** visto dal centro della **Terra** a **6378 Km** sottende un angolo pari a circa **3,23** secondi d'arco, che

corrisponde (utilizzando le formule viste prima) ad un angolo solido di $2,4582736 \cdot 10^{-10}$ **steradiani**.

Sulla superficie terrestre questi $2,4582736 \cdot 10^{-10}$ steradiani si traducono in :

$$\text{Area}(m^2) = 2,4582736 \cdot 10^{-10} \cdot 6378000^2 = 0,30697435 \text{ m}^2$$

Quindi si ha un eccesso rispetto ai **10000 metri quadri** di soli **0,30697435 m²** , corrispondenti ad un'area quadrata di circa **55 cm di lato**.

APPENDICE B

Trasformazione vettoriale di un sistema di coordinate astronomiche ad un altro

Quando si vuole passare da un sistema di coordinate astronomiche ad un altro ci si può avvalere oltre che della trigonometria sferica anche del calcolo vettoriale e matriciale, che tramite la rotazione di terne di assi cartesiani permette di ottenere le trasformazioni di coordinate in maniera abbastanza semplice.

Per comprendere meglio il problema facciamo riferimento alla sfera celeste di **Figura 1B** in cui rispetto ad una terna di assi **X,Y;Z** il punto **M** di coordinate (α, δ) esegua una rotazione intorno all'asse **Z** in senso antiorario di un angolo θ , la qual cosa porta il punto **M** nella posizione **M'** di coordinate (α', δ') . Nel caso della **Figura 1B** si ha naturalmente:

$$\alpha' = \alpha + \theta$$

$$\delta' = \delta$$

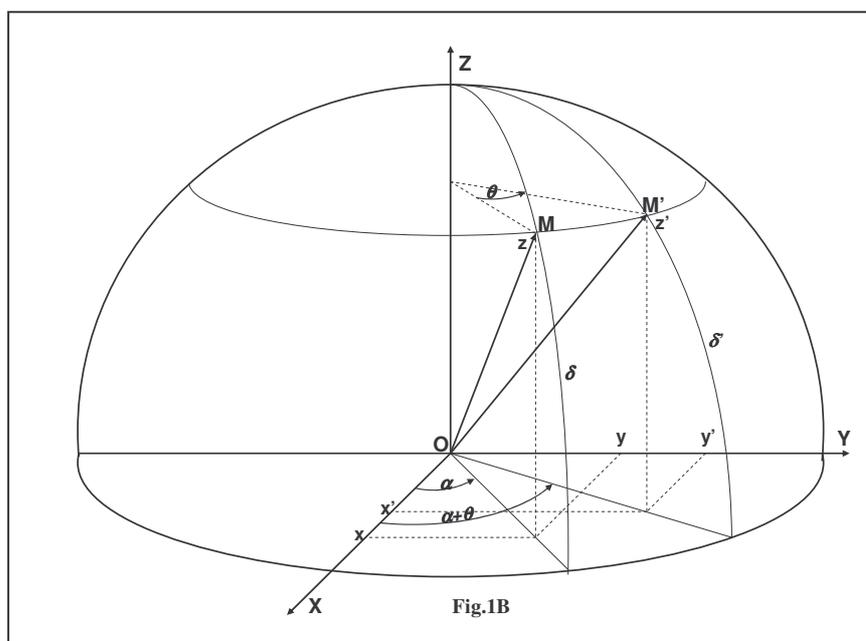


Fig.1B

quindi ricordando che in coordinate polari si può scrivere (assumendo come unitario il raggio della sfera):

$$X' = \cos(\alpha + \theta) \cdot \cos \delta$$

$$Y' = \sin(\alpha + \theta) \cdot \cos \delta$$

$$Z' = \sin \delta$$

$$X = \cos \alpha \cdot \cos \delta$$

$$Y = \sin \alpha \cdot \cos \delta$$

$$Z = \sin \delta$$

e che

$$\sin(\alpha + \theta) = \sin \alpha \cdot \cos \theta + \cos \alpha \cdot \sin \theta$$

$$\cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cdot \cos \theta - \sin \alpha \cdot \sin \theta$$

Il vettore $\underline{OM'}$ si può scrivere :

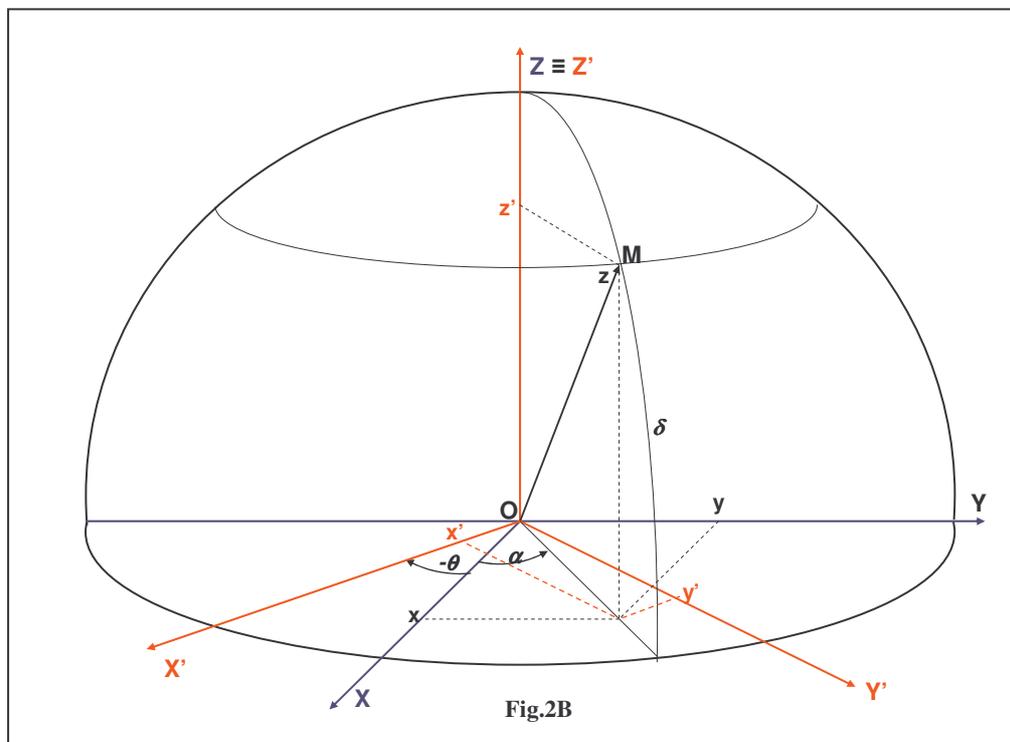
$$\underline{OM'} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \theta) \cdot \cos \delta \\ \sin(\alpha + \theta) \cdot \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \cdot \cos \theta - Y \sin \theta \\ X \cdot \sin \theta + Y \cos \theta \\ Z \end{pmatrix}$$

che sotto forma matriciale diventa:

$$\underline{OM'} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{R}_Z(\theta) \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

dove con $\mathbf{R}_Z(\theta)$ si indica la matrice di rotazione del punto \mathbf{M} di un angolo θ in senso antiorario attorno all'asse \mathbf{Z} .

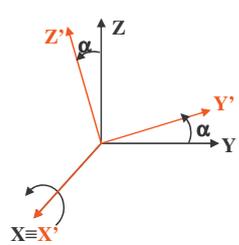
La rotazione che abbiamo considerato ora, viene definita **attiva**, in quanto la terna di riferimento è fissa nello spazio e a muoversi di un angolo θ (positivo in senso antiorario) è il punto \mathbf{M} che passa in $\mathbf{M'}$. In realtà, nei sistemi di coordinate, l'oggetto \mathbf{M} lo si considera fisso nello spazio mentre a ruotare sono gli assi del sistema di coordinate (vedi **Figura 2B**).



In questo caso la rotazione viene definita **passiva**, in quanto porta gli assi **X** e **Y** a compiere una rotazione di un angolo θ (negativo in senso orario) in senso opposto a quello della rotazione **attiva**. Pertanto nella rotazione **passiva**, nel caso di rotazioni θ positive antiorarie, cambiano soltanto i segni dei seni rispetto a quella **attiva** (in quanto i coseni di angoli negativi sono positivi) nel seguente modo:

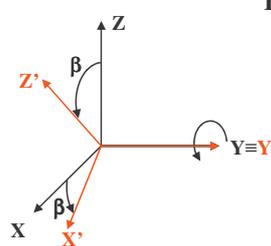
$$\underline{OM'} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R_Z(\theta) \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

E' possibile dimostrare con procedure analoghe a quelle appena viste l'aspetto che assumono le altre matrici di rotazione (**passive**) secondo gli assi **X**, **Y** e **Z**:



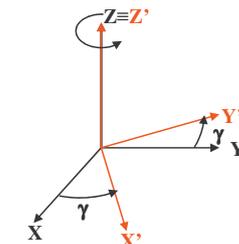
Rotazione antioraria rispetto a X

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R_X(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$



Rotazione antioraria rispetto a Y

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R_Y(\beta) \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$



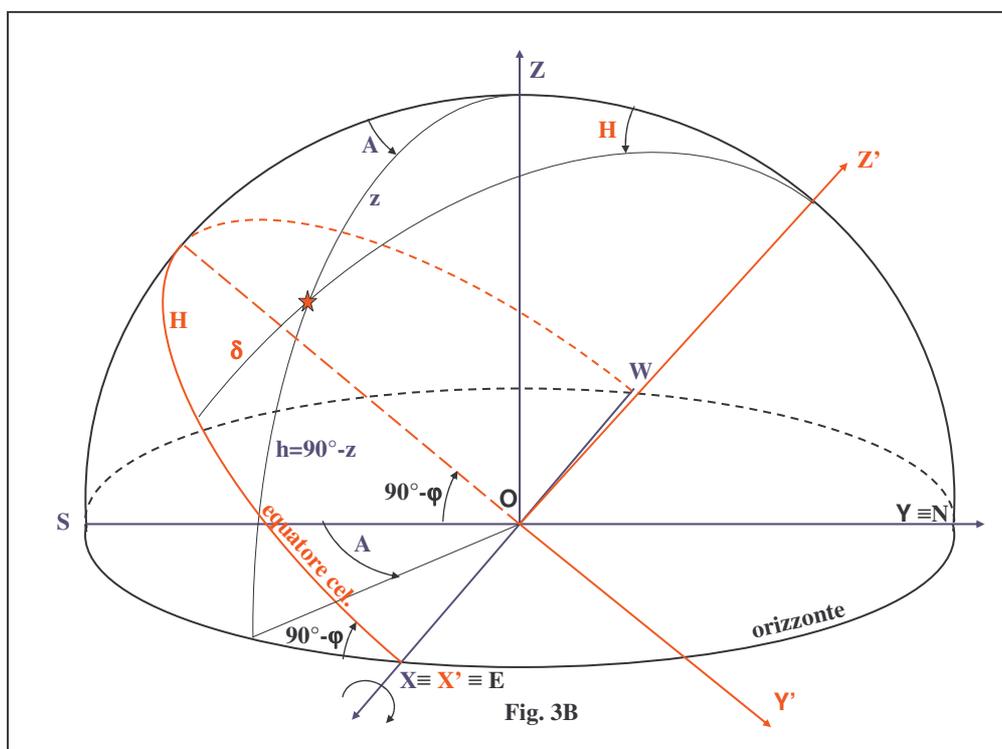
Rotazione antioraria rispetto a Z

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R_Z(\gamma) \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che gli angoli sono contati positivamente in senso antiorario e che il senso di rotazione lo si determina, praticamente, guardando l'asse nel senso della freccia. Quindi i segni dei seni degli angoli nelle matrici di rotazione diventano negativi se la rotazione è oraria mentre i coseni mantengono inalterato il loro segno. L'unica eccezione è per la rotazione attorno all'asse Y che pur essendo antioraria ruota l'asse da Z verso l'asse X e quindi in ordine progressivo decrescente con conseguente inversione dei segni dei seni (come se la rotazione avvenisse in senso orario).

Vediamo ora il caso concreto in cui si voglia passare dal sistema di coordinate **Altazimutale (I Sistema)** a quello **Orario (II Sistema)**.

Immaginiamo al solito di rappresentare una stella nel sistema **Altazimutale** di coordinate **(A,h)** come mostrato in **Figura 3B** e vediamo di calcolare le corrispondenti coordinate **(H, δ)** **Sistema Orario**



Se la latitudine del luogo di osservazione è φ occorrerà compiere una rotazione in senso orario di $(90^\circ - \varphi)$ per portare il piano dell'orizzonte a coincidere con il piano dell'equatore celeste. Quindi con questa rotazione **passiva**, per quanto visto prima, la matrice di rotazione $R(90^\circ - \varphi)$ assume la seguente forma:

$$R(90^\circ - \varphi) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90^\circ - \varphi) & -\sin(90^\circ - \varphi) \\ 0 & \sin(90^\circ - \varphi) & \cos(90^\circ - \varphi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix}$$

mentre le coordinate nel **Sistema Altoazimutale** messe in forma matriciale diventano:

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin A & \cos(90^\circ - z) \\ -\cos A & \cos(90^\circ - z) \\ \sin(90^\circ - z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin A & \sin z \\ -\cos A & \sin z \\ \cos z \end{vmatrix}$$

e quelle nel **Sistema Orario** assumono la seguente forma:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin H & \cos \delta \\ -\cos H & \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

NOTA: in questo caso se prendiamo i valori di **A** e **H** contati dal meridiano Sud come in **Figura 3B** dobbiamo considerarli in valore assoluto, mentre dobbiamo cambiare il segno ai valori matriciali di **Y** e **Y'** che in questo caso sono entrambi negativi.

Quindi eseguendo il prodotto tra la matrice di rotazione e quella delle coordinate nel **Sistema Altazimutale** ottengo la matrice delle coordinate nel **Sistema Orario**

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \mathbf{R}(90^\circ - \varphi) \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

che sviluppata diventa:

$$\begin{pmatrix} \sin H & \cos \delta \\ -\cos H & \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin A & \sin z \\ -\cos A & \sin z \\ \cos z \end{pmatrix}$$

eseguendo il prodotto matriciale si arriva alle formule di trasformazione dal sistema di coordinate **Altazimutale** a quello **Orario** già viste nella **Figura 15** del presente Corso

$$\sin H \cdot \cos \delta = \sin A \cdot \sin z$$

$$\cos H \cdot \cos \delta = \cos A \cdot \sin z \cdot \sin \varphi + \cos z \cdot \cos \varphi$$

$$\sin \delta = -\cos A \cdot \sin z \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos z$$

da cui è facile estrarre i valori di **H** e **δ** una volta noti **A**, **z** e **φ**

Per passare dal **Sistema Orario** a quello **Altazimutale** è sufficiente invertire il prodotto matriciale sostituendo alla matrice di rotazione **R(90°-φ)** la sua inversa che in questo caso coincide con la sua Trasposta **R^T(90°-φ)**, cioè scambiando semplicemente le righe con le colonne

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{R}^T(90^\circ - \varphi) \cdot \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$$

che sviluppata diventa:

$$\begin{vmatrix} \sin A & \sin z \\ -\cos A & \sin z \\ \cos z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sin H & \cos \delta \\ -\cos H & \cos \delta \\ \sin \delta \end{vmatrix}$$

eseguendo il prodotto matriciale si hanno le formule già viste in **Figura 15**:

$$\sin A \cdot \sin z = \sin H \cdot \cos \delta$$

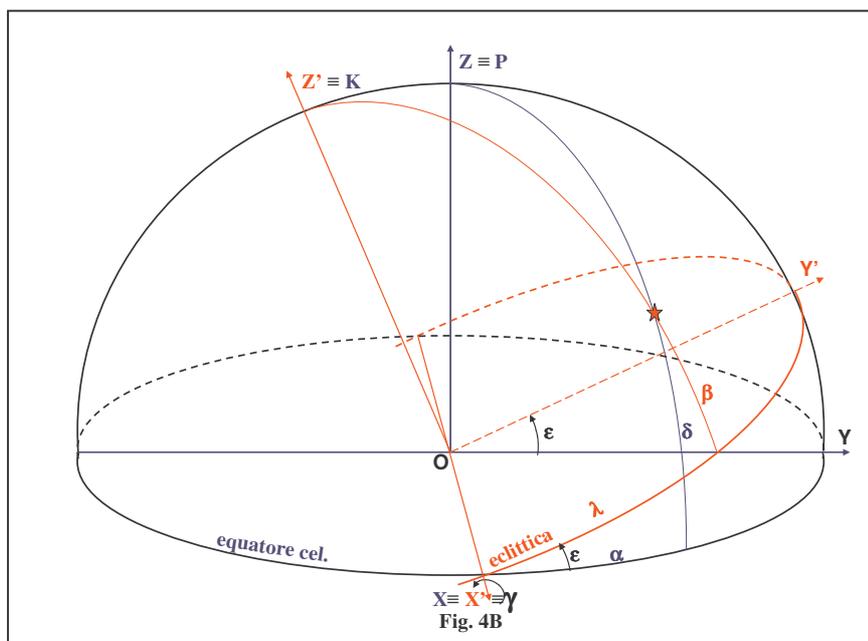
$$\cos A \cdot \sin z = \cos H \cdot \cos \delta \cdot \sin \varphi - \cos \varphi \cdot \sin \delta$$

$$\cos z = \cos H \cdot \cos \delta \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \sin \delta$$

da cui è possibile ricavare **A** e **z** una volta noti **φ**, **H** e **δ**

Discorso analogo se si volessero trasformare le coordinate del **Sistema Equatoriale** nelle analoghe **Eclittiche** e viceversa.

In questo caso si tratta di effettuare una rotazione in senso antiorario di un angolo **ε** (obliquità dell'Eclittica), del piano dell'Equatore Celeste su quello dell'Eclittica (vedi **Figura 4B**)



Pertanto una stella di coordinate equatoriali **(α,δ)** avrà delle corrispondenti coordinate eclittiche **(λ,β)**. Per quanto visto prima la trasformazione da coordinate equatoriali in eclittiche ha la forma:

$$\begin{vmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{vmatrix} = \mathbf{R}(\varepsilon) \cdot \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$$

che sviluppata assume la forma:

$$\begin{vmatrix} \cos \lambda & \cos \beta \\ \sin \lambda & \cos \beta \\ \sin \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \delta \\ \sin \alpha & \cos \delta \\ \sin \delta \end{vmatrix}$$

Eseguendo il prodotto matriciale si arriva alla determinazione delle formule riportate nella **Figura 16** del Corso:

$$\cos \lambda \cdot \cos \beta = \cos \alpha \cdot \cos \delta$$

$$\sin \lambda \cdot \cos \beta = \sin \alpha \cdot \cos \delta \cdot \cos \varepsilon + \sin \delta \cdot \sin \varepsilon$$

$$\sin \beta = -\sin \alpha \cdot \cos \delta \cdot \sin \varepsilon + \sin \delta \cdot \cos \varepsilon$$

Utilizzando la matrice di rotazione $\mathbf{R}^T(\varepsilon)$ si può passare dal sistema di coordinate eclittico e quello equatoriale

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \mathbf{R}^T(\varepsilon) \cdot \begin{vmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{vmatrix}$$

che sviluppata diventa:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \delta \\ \sin \alpha & \cos \delta \\ \sin \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \lambda & \cos \beta \\ \sin \lambda & \cos \beta \\ \sin \beta \end{vmatrix}$$

Eseguendo il prodotto matriciale si arriva alle formule viste in **Figura 16**

$$\cos \alpha \cdot \cos \delta = \cos \lambda \cdot \cos \beta$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \delta = \sin \lambda \cdot \cos \beta \cdot \cos \varepsilon - \sin \beta \cdot \sin \varepsilon$$

$$\sin \delta = \sin \lambda \cdot \cos \beta \cdot \sin \varepsilon + \sin \beta \cdot \cos \varepsilon$$

APPENDICE C

Passaggio da Coordinate di Catalogo a Coordinate di Puntamento di un telescopio

Lo scopo di questa Appendice é quello di fornire all'utente, che utilizza un qualsiasi telescopio, i concetti astronomici basilari per arrivare alla determinazione delle coordinate equatoriali e altazimutali reali (cioè di puntamento) di un certo numero di **Stelle**, partendo dalle coordinate medie di un catalogo fondamentale. Nella fattispecie nelle righe che seguono si forniranno gli elementi per la realizzazione di un modello di volta **Celeste** da utilizzarsi per il puntamento di un telescopio che a scopo dimostrativo è stato scelto il Telescopio Nazionale Galileo (TNG), sito a La Palma nelle Canarie. Date le imponenti dimensioni di questo strumento, che si avvale di uno specchio principale del diametro di 3.5 metri e di una montatura altoazimutale per l'inseguimento degli oggetti osservati, la conoscenza quanto più accurata possibile delle coordinate di puntamento del telescopio su un dato oggetto è condizione essenziale. Merita ricordare che, anche se gli encoders del telescopio, secondo le specifiche fornite dalla Ditta costruttrice, garantiscono una puntata dell'oggetto osservato con una risoluzione angolare di 0",06, le coordinate astronomiche effettivamente osservate, anche dopo l'adozione del metodo rigoroso di trasformazione delle coordinate di catalogo, avranno ancora degli errori che oscillano da qualche centesimo a qualche decimo di arcsec a seconda della posizione dell'oggetto in cielo.

Tuttavia questa precisione é più che sufficiente per identificare univocamente un oggetto in cielo. Per contro, se le coordinate di puntamento avessero degli errori ben più grandi di quelli citati sarebbe estremamente complesso discriminare gli errori presenti nelle coordinate astronomiche da quelli introdotti dallo strumento, come ad esempio le flessioni della struttura metallica del telescopio.

Pertanto, se abbiamo il mezzo per crearci, per un campione di **Stelle** note, delle coordinate astronomiche prive o quasi di errori, c'è la possibilità di valutare, in base allo scostamento di questi rispetto al centro del campo di vista del telescopio, l'entità degli errori strumentali per ogni punto della volta **Celeste**, e quindi correggere la puntata di conseguenza.

In seguito a ciò, con la procedura che descriveremo più avanti, si forniranno le basi astronomiche su cui costruire un catalogo di **Stelle** aventi realmente le coordinate osservate in quel luogo e in quell'istante.

Anche se in queste pagine prenderemo in considerazione tutti i fenomeni astronomici che alterano le coordinate di un Catalogo Fondamentale, nella realizzazione pratica del puntamento del telescopio TNG, a causa della rifrazione atmosferica, prenderemo in considerazione solo quei fenomeni che modificano le coordinate di puntamento di una quantità superiore al decimo di secondo d'arco.

EQUINOZIO MEDIO, PRECESSIONE E NUTAZIONE

Sulla base delle considerazioni sopra esposte, vediamo ora di analizzare dal punto di vista astronomico quali sono i passi necessari per passare dalle coordinate equatoriali di un Catalogo Fondamentale, come **l'FK5 Extension**, a quelle che effettivamente si debbono impostare al telescopio per puntare correttamente un oggetto.

Poiché nei cataloghi fondamentali sono date le coordinate medie delle **Stelle**, riferite all'Equinozio Medio ed **Equatore** Medio all'inizio di un **Anno Besselliano o Giuliano**, si consiglia il lettore di andarsi a rileggere nelle pagine precedenti le definizioni di **Equinozio Medio, di Precessione di Nutazione, di Anno Besselliano e di Anno Giuliano**.

Quindi, quando si parla di posizioni medie di una **Stella** riferite ad un Equinozio Medio ed **Equatore Medio** ci si riferisce sempre alle coordinate della **Stella** rispetto ad un equinozio determinato solo dal moto conico del polo dovuto alla **Precessione Generale**, e non alla componente ellittica sovrapposta a tale moto dovuta alla **Nutazione**.

Ricordiamo inoltre che le posizioni medie riportate nei cataloghi fondamentali sono generalmente riferite all'inizio di un **Anno Besselliano o Giuliano**;

COORDINATE MEDIE BARICENTRICHE ED ELIOCENTRICHE

Fatte le premesse sull'equinozio medio e sul tipo di anno adottato, occorre stabilire in quale sistema di riferimento vengono date le coordinate equatoriali delle **Stelle** nei cataloghi fondamentali.

Poiché un sistema di riferimento è tanto più attendibile quanto più è fisso, o dotato di moto rettilineo uniforme, rispetto allo spazio circostante, il centro della nostra **Galassia** risponderebbe a questi requisiti.

L'unico inconveniente è che essendo molto lontano da noi lo rende non attendibile come origine del sistema di coordinate astronomiche, per cui occorre scegliere un altro punto dello spazio più vicino a noi e meglio determinabile.

Questo punto, in linea di massima, è il centro del **Sole**, il quale lo si può considerare in prima approssimazione dotato solo di moto rettilineo uniforme normale alla direzione che va verso il **centro galattico**.

In realtà ciò che si muove di moto rettilineo uniforme non è il centro del Sole, bensì il centro di massa (baricentro) del sistema solare che induce sul centro del **Sole** un moto vagamente sinusoidale sovrapposto a quello rettilineo, dipendente dalla posizione relativa dei Pianeti maggiori rispetto al Sole stesso.

Tuttavia il moto complesso del centro del Sole è tale da non discostarsi di più di **0,008 Unità Astronomiche (U.A.) (circa 1 200 000 Km)** dal baricentro del sistema planetario, quando **Giove** e **Saturno** (i Pianeti maggiori) si trovano allineati da una stessa parte. In questo caso il baricentro capita fuori dal disco solare di circa **500 000 Km**, mentre quando i due Pianeti sono in opposizione rispetto al Sole il baricentro capita a **0,002 U.A. (circa 300 000 km)**, quindi dentro il disco solare che ricordiamo ha un raggio di **696 000 km**.

Questo fatto si traduce in una variazione massima delle coordinate di una **Stella**, “vicina”, ad esempio a 10 parsec da noi, di una quantità inferiore al millesimo di secondo d'arco.

Per gli scopi del nostro lavoro il confondere il baricentro del sistema planetario (origine del sistema di coordinate di un catalogo fondamentale) con il centro del **Sole** è ininfluenza, in quanto, ci sono altri fenomeni ben più macroscopici di questo che alterano le coordinate di puntamento del telescopio, come vedremo più avanti.

COORDINATE MEDIE ALLA DATA OSSERVAZIONE

Come sappiamo le **Coordinate Equatoriali Baricentriche Medie** del Catalogo FK5 sono riferite all'Equinozio Medio ed Epoca di Osservazione del J2000,0.

Il primo passo da fare per arrivare alle coordinate di puntamento è quello di portarci alle **Coordinate Medie Eliocentriche** (praticamente uguali a quelle baricentriche per le ragioni viste prima) all'istante in cui si vuole puntare il telescopio.

I fenomeni che entrano in gioco sono due: il Moto Proprio e la **Precessione Generale**.

Il primo fenomeno (**Moto Proprio**) è quello che ci permette di arrivare **dall'Equinozio Medio ed Equatore Medio J2000**, allo stesso **Equinozio Medio** ma riferito all'Epoca reale di osservazione.

Il secondo fenomeno (**Precessione Generale**) é quello che ci permette di arrivare alla determinazione dell'**Equinozio ed Equatore Medio** all'istante dell'osservazione. Quindi considerando globalmente i due fenomeni , l' α e la δ finale della **Stella** saranno le **coordinate Equatoriali Medie Eliocentriche**, cioè quelle osservate dal **Sole**, all'istante dell'osservazione.

Se con T_1 indichiamo l'**epoca J2000,0** del catalogo e con T_2 l'**Epoca Giuliana** di osservazione al **TNG**, e α e δ le coordinate di catalogo al **J2000,0**, tramite le seguenti formule del **Moto Proprio** e della **Precessione Generale** si arriva ai valori α_1 e δ_1 cercati.

Il fenomeno, prodotto dal **Moto Proprio** della **Stella**, modifica le **Coordinate Medie Eliocentriche** dal **J2000.0** alla data di osservazione secondo le seguenti relazioni:

$$\alpha_{01} = (\mu_\alpha(T_2 - T_1)) / \cos(\delta)$$

$$\alpha_0 = \alpha + \alpha_{01} (1 + \mu_\delta (T_2 - T_1) \tan(\delta) \sin(1''))$$

$$\delta_0 = \delta + (\mu_\delta (T_2 - T_1) - 1/2 \alpha_{01}^2 \sin(\delta) \cos(\delta) \sin(1''))$$

dove μ_α e μ_δ sono i **Moti Propri** in α e δ in **arcsec / yrs** dedotti dal catalogo, mentre α_0 e δ_0 sono le coordinate corrette per **Moto Proprio** alla data di osservazione, ma riferite all'**Equinozio J2000.0**.

Il fenomeno della **Precessione Generale** invece modifica le **coordinate Medie Eliocentriche** dall'equinozio J2000 alla data di osservazione mediante l'utilizzo delle seguenti espressioni:

$$\tau = (T_1 - 1900) / 1000$$

$$T_0 = (T_2 - T_1) / 1000$$

$$R = (23042,53 + 139,73\tau + 0,06\tau^2) T_0 + (30,23 - 0,27\tau) T_0^2 + 18,0 T_0^3$$

$$S = R + (79,27 + 0,66 \tau) T_0^2 + 0,32 T_0^3$$

$$Y = (20046,85 - 85,33 \tau - 0,37 \tau^2) T_0 + (-42,67 - 0,37\tau) T_0^2 - 41,80 T_0^3$$

$$A = \alpha_0 + R$$

$$Q1 = \sin(Y) \sin(A) (\tan(\delta_0 + \tan((Y/2) \cos(A)))$$

$$Q2 = 1 - \sin(Y) \cos(A) (\tan(\delta_0 + \tan(Y/2) \cos(A)))$$

$$(A' - A) = \arctan(Q1/Q2)$$

$$Q10 = \tan(Y/2) \cos[(A' + A)/2]$$

$$Q20 = \cos[(A' - A)/2]$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + (A' - A) + S + R$$

$$\delta_1 = \delta_0 + 2 \arctan(Q10/Q20)$$

COORDINATE VERE ELIOCENTRICHE ALLA DATA DI OSSERVAZIONE

Dopo essere passati dalle **Coordinate Medie Eliocentriche** di catalogo, tramite le correzioni dovute alla **Precessione** e ai **Moti Propri**, a coordinate sempre medie ed eliocentriche alla data di osservazione, il passo successivo `e quello di arrivare alle **Coordinate Vere Eliocentriche** dell'oggetto alla data di osservazione.

Questo passaggio contempla le correzioni dovute al fenomeno della **Nutazione** sopra descritto.

Poiché nella **Nutazione** vengono considerati alcuni elementi del **Sole** e della **Luna**, quali la **Longitudine Media del Sole** del suo **Perigeo**, la **Longitudine Media della Luna**, della sua **Anomalia Media** e della **Longitudine del suo Nodo**, ecc., vediamo come questi si possano determinare in via analitica per una certa epoca di osservazione.

Elementi del Sole

Occorre prima ricordare che con il termine ``**Longitudine Media**'' del **Sole** e della **Luna** si intende la posizione fittizia di un **Sole Medio** o di una **Luna Media** che si muove sull'**Eclittica** di moto angolare uniforme. La **Longitudine Media del Sole (Medio) (Λ) all'Equinozio Medio** della data di osservazione è data dalla seguente relazione (in gradi):

$$\Lambda = 279^{\circ},696678 + 0^{\circ},9856473354(d) + 0^{\circ},00002267(D)^2$$

dove con (**d**) si sta ad indicare il numero di giorni (e frazioni di giorno) delle effemeridi trascorsi dal **0 gennaio 1900 alle ore 12 di TE** fino alla data di osservazione, mentre (**D**) = (**d**)/10000

La **Longitudine Media del Perigeo solare (Π)** all'equinozio medio della data è invece:

$$\Pi = 281^{\circ},220833 + 0^{\circ},0000470684(d) + 0^{\circ},0000339(D)^2 + 0^{\circ},00000007(D)^3$$

L'**Anomalia Media del Sole Γ** é data dalla differenza tra la **Longitudine Media del Sole** e la **Longitudine Media del Perigeo solare** secondo la relazione:

$$\Gamma = \Lambda - \Pi$$

L'**Eccentricità dell'orbita terrestre (e)** é data da:

$$e = 0,01675104 - 0,00004180(T) - 0,000000126(T)^2$$

dove (**T**) = (**D**)/3,6525.

L'**Obliquità media dell'Eclittica ϵ** é data da:

$$\epsilon = 23^{\circ},452294 - 0^{\circ},0130125(T) - 0,00000164(T)^2 + 0^{\circ},000000503(T)^3$$

L'**Anomalia Eccentrica (E)** del **Sole** é data da:

$$\sin(E) = \sin [\Gamma + (e - e^3/8)\sin(\Gamma) + 1/2e^2 \sin(2\Gamma) + 3/8 e^3 \sin(3\Gamma)]$$

Il **Raggio Istantaneo dell'orbita terrestre (R_i)** espresso in **U.A.** è dato da:

$$R_i = (1 - e \cos(E))$$

Infine il passaggio da **Longitudine Media del Sole** a quella **Vera del Sole Vero** che si muove di moto kepleriano (e quindi non uniforme) su di un'orbita ellittica sul piano dell'**Eclittica** è dato dalla seguente relazione in radianti:

$$\Lambda_0^r = \Lambda^r + (2e - 1/4e^3)\sin(\Gamma) + 5/4e^2 \sin(2\Gamma) + 13/12e^3 \sin(3\Gamma)$$

con ovvio significato dei simboli.

Come per il **Sole** abbiamo i seguenti elementi della **Luna**.

Elementi della Luna

La **Longitudine Media della Luna** (λ), misurata sull'**Eclittica** dall'equinozio medio della data al nodo ascendente dell'orbita lunare e quindi lungo l'orbita è data dalla seguente formula con le notazioni temporali uguali a quelle date per il Sole:

$$\lambda = 270^\circ,434164 + 13^\circ,1763965268(d) - 0^\circ,0000850(D)^2 + 0^\circ,000000039(D)^3$$

La **Longitudine Media del Perigeo Lunare** (p) misurata sull'**Eclittica** dall'equinozio medio della data al nodo ascendente dell'orbita Lunare e quindi lungo l'orbita è data da:

$$p = 334^\circ,329556 + 0^\circ,1114040803(d) - 0^\circ,0007739(D)^2 - 0^\circ,00000026(D)^3$$

La **Longitudine del Nodo Ascendente Medio** (Ω) dell'orbita lunare sull'**Eclittica** misurata dall'equinozio medio della data è:

$$\Omega = 259^\circ,183275 - 0^\circ,0529539222(d) + 0^\circ,0001557(D)^2 + 0^\circ,00000005(D)^3$$

L'**Anomalia Media della Luna** (γ), considerata sul piano dell'**Eclittica** invece che sul piano orbitale della **Luna**, dato il basso valore dell'inclinazione esistente tra i due piani, è data dalla semplice relazione:

$$\gamma = \lambda - p$$

Avendo ora a disposizione tutti gli elementi del **Sole** e della **Luna** si possono calcolare i valori della **Nutazione in Longitudine e in Obliquità**.

I termini della **Nutazione** dipendenti dal nodo lunare sono i seguenti sia in longitudine che in obliquità:

$$\Delta(\psi_1) = -17'',234 \sin(\Omega) - 0'',017(T) \sin(\Omega) + 0'',209 \sin(2\Omega)$$

$$\Delta(\epsilon_1) = 9'',210 \cos(\Omega) - 0'',090 \cos(2\Omega)$$

I termini della **Nutazione** dipendenti dalla **Longitudine del Sole** sono:

$$\Delta(\psi_2) = -1'',272 \sin(2\Lambda) + 0'',126 \sin(\Lambda - \Pi) - 0'',050 \sin(3\Lambda - \Pi) + 0'',021 \sin(\Lambda + \Pi)$$

$$\Delta(\epsilon_2) = + 0'',551\cos(2\Lambda)+0'',022 \cos(3\Lambda-\Pi) - 0'',009\cos(\Lambda+\Pi)$$

I termini della **Nutazione** dipendenti dalla **Longitudine della Luna** sono:

$$\Delta(\psi_3)=-0'',204\sin(2\lambda)+0'',068\sin(\gamma)-0,034\sin(2\lambda-\Omega)-0'',026\sin(2\lambda+\gamma)+0'',011\sin(2\lambda-\gamma)+0'',015\sin(2(\lambda-\Lambda)-\gamma)+0'',006\sin(2(\lambda-\Lambda))$$

$$\Delta(\epsilon_3)=+ 0'',089\cos(2\lambda) + 0'',018\cos(2\lambda-\Omega) - 0'',005\cos(2\lambda-\gamma) + 0'',011\cos(2\lambda+\gamma)$$

Pertanto la somma dei tre termini di **Nutazione in Longitudine e Obliquità** danno lo spostamento effettivo del **Polo Medio** da quello vero secondo la relazione:

$$\Delta(\psi)=\Delta(\psi_1)+\Delta(\psi_2)+\Delta(\psi_3)$$

$$\Delta(\epsilon) = \Delta(\epsilon_1) +\Delta(\epsilon_2) +\Delta(\epsilon_3)$$

Le variazioni in α e δ dovute alla **Nutazione** utilizzando quelle in **Longitudine e Obliquità** sono date dalle relazioni seguenti:

$$\Delta(\alpha_1)=(\cos(\epsilon)+\sin(\epsilon)\sin(\alpha_1)\tan(\delta_1))\Delta(\psi)-\cos(\alpha_1)\tan(\delta_1)\Delta(\epsilon)$$

$$\Delta(\delta_1) = \cos(\alpha_1)\sin(\epsilon)\Delta(\psi) + \sin(\alpha_1)\Delta(\epsilon)$$

COORDINATE APPARENTI ALLA DATA DI OSSERVAZIONE

Se apportassimo le correzioni appena trovate ad α_1 e δ_1 avremmo le coordinate vere delle **Stelle all'Equinozio Vero** alla data di osservazione. In altri termini queste coordinate sarebbero quelle vere che occorrerebbe puntare se l'osservatore si trovasse nel baricentro del sistema solare (o impropriamente nel centro del **Sole**).

Purtroppo la **Terra** si muove intorno al **Sole** e per questa ragione subentrano altri due fenomeni astronomici che complicano la trasformazione delle coordinate Stellari.

Questi fenomeni sono l'**Aberrazione Astronomica Annua** e la **Parallasse Annua**.

Aberrazione Astronomica Annua

L'**Aberrazione annua** é quel fenomeno dovuto alla velocità tangenziale della **Terra** intorno al **Sole** che, combinata vettorialmente con la velocità della luce proveniente dalle **Stelle**, modifica la direzione di osservazione di un certo angolo.

Se assumiamo che la **Terra** giri intorno al **Sole** su di un'orbita circolare con velocità tangenziale costante, ne consegue che la massima deviazione angolare di una **Stella** sarebbe data dal rapporto:

$$K = V/c \operatorname{cosec}(1'') = 20'',49552$$

dove V è la velocità della **Terra** e c la velocità della luce mentre K viene chiamata **Costante d'Aberrazione**.

In realtà la **Terra** gira intorno al **Sole** su di un'orbita ellittica con velocità variabile che può essere scomposta in due componenti costanti, di cui una perpendicolare alla linea **Sole-Terra (F)** che dà

origine al termine **K** ed un'altra perpendicolare alla linea degli **apsidi (f)** e che dà origine ad un termine del second'ordine **k** :

$$k = K(e) = 0'',343$$

chiamato comunemente **E-term**.

Tramite considerazioni di trigonometria sferica queste costanti (**K** e **k**) combinate con la **Longitudine Vera del Sole (Λ)** e le coordinate equatoriali della **Stella** forniscono le variazioni in **α** e **δ** che occorre dare alle **Coordinate Equatoriali Vere Eliocentriche** per includere il fenomeno dell'**Aberrazione Annuale**. Questo fenomeno lo si evidenzerebbe se si potesse osservare la posizione delle **Stelle** a distanza, per così dire, infinita (Parallasse nulla), passando istantaneamente dal centro del **Sole** (fermo) al centro della **Terra** (in moto intorno al **Sole**).

A questo punto abbiamo la possibilità di utilizzare le formule che danno le variazioni in **α** e **δ** prodotte dal fenomeno dell'**aberrazione annua** sia con l' **E-term** che senza:

$$\Delta(\alpha_2) = [\cos(\alpha_1)\Delta(Y)/R_i - \sin(\alpha_1)\Delta(X)/R_i] \sec(\delta_1)$$

$$\Delta(\delta_2) = -\sin(\delta_1)\cos(\alpha_1)\Delta(X)/R_i - \sin(\delta_1)\sin(\alpha_1)\Delta(Y)/R_i + \cos(\delta_1)\Delta(Z)/R_i$$

dove $\Delta(X)/R_i$, $\Delta(Y)/R_i$, $\Delta(Z)/R_i$ sono le variazioni nelle coordinate rettangolari rispetto al raggio istantaneo dell'orbita terrestre, che senza **E-term** possono scriversi:

$$\Delta(X)/R_i = K \sin(\Lambda)$$

$$\Delta(Y)/R_i = -K \cos(\epsilon) \cos(\Lambda)$$

$$\Delta(Z)/R_i = -K \sin(\epsilon) \cos(\Lambda)$$

mentre con l'**E-term** si scrivono:

$$\Delta(X)/R_i = K(\sin(\Lambda) + e \sin(\Pi))$$

$$\Delta(Y)/R_i = -K \cos(\epsilon)(\cos(\Lambda) + e \cos(\Pi))$$

$$\Delta(Z)/R_i = -K \sin(\epsilon)(\cos(\Lambda) + e \cos(\Pi))$$

Occorre ricordare che prima del 1984 tutti i cataloghi fondamentali davano le posizioni medie includendo anche l'**E-term**, mentre il catalogo **FK5** essendo stato creato nel 1988 ha le posizioni medie senza **E-term**.

Quindi per ottenere le coordinate di puntamento finali occorrerà considerare le correzioni $\Delta(\alpha_2)$ e $\Delta(\delta_2)$ che includono anche l'**E-term** (secondo set di equazioni delle coordinate rettangolari)

Parallasse Annuale

Il secondo fenomeno che altera le posizioni delle **Stelle** passando da posizione eliocentrica a geocentrica è quello dello spostamento parallattico causato dalla **Parallasse Annuale** .

Questo fenomeno, indotto dal movimento della **Terra** nel suo moto orbitale intorno al **Sole**, fa sì che una **Stella** relativamente vicina a noi mostri uno spostamento genericamente ellittico rispetto ad uno scenario di **Stelle** lontane "fisse".

Tali spostamenti in α e δ , sempre al di sotto del secondo d'arco, si possono calcolare tramite la seguente relazione:

$$\Delta(\alpha_3) = R_1 \pi [-\cos(\Lambda) \sin(\alpha_1) + \cos(\epsilon) \sin(\Lambda) \cos(\alpha_1)] \sec(\delta_1)$$

$$\Delta(\delta_3) = R_1 \pi [-\cos(\Lambda) \sin(\delta_1) \cos(\alpha_1) - \cos(\epsilon) \sin(\Lambda) \sin(\delta_1) \sin(\alpha_1) + \sin(\epsilon) \sin(\Lambda) \cos(\delta_1)]$$

In questa situazione, correggendo per il fenomeno della **Parallasse Annua** é come se osservassimo la posizione delle **Stelle** alla data di osservazione dal centro della **Terra** anche per le **Stelle** vicino a noi che, come si è detto, si spostano per effetto parallattico nel corso dell'anno su di un percorso ellittico.

Apportando queste ultime due correzioni si arriva alla Posizione Apparente delle **Stelle** alla data di osservazione.

COORDINATE TOPOCENTRICHE ALLA DATA DI OSSERVAZIONE

In realtà le coordinate Apparenti non sono ancora sufficienti per puntare correttamente il telescopio perchè l'osservatore non si trova al centro della **Terra**, ma sulla superficie terrestre la quale come è noto è avvolta dall'atmosfera.

Con questa situazione il passaggio dal centro della **Terra** al luogo di osservazione implica una serie di fenomeni che, a parte la rifrazione atmosferica, sono tutti inferiori al secondo d'arco, ma che comunque prendiamo in considerazione anche se non tutti verranno inseriti nel programma di trasformazione delle coordinate.

I fenomeni secondari in questione sono :

- 1) l'**Aberrazione Diurna**
- 2) la **Parallasse Geocentrica**
- 3) la **Polodia**
- 4) la **Deflessione Relativistica della Luce**

Aberrazione diurna

Analogamente all'**Aberrazione Annua**, l'**Aberrazione Diurna** é quel fenomeno per cui la velocità tangenziale sulla **Terra** di un osservatore dovuta al moto rotatorio della **Terra** intorno al proprio asse, combinata vettorialmente con la velocità della luce proveniente dalle **Stelle** fa sì che la direzione di osservazione realmente osservata risulti spostata angularmente di una quantità non superiore a circa **0'',3**.

Le variazioni in α e δ che competono a questo fenomeno si riassumono nelle seguenti formule (espresse in arcsec):

$$\Delta(\alpha_4) = 0'',320 \cos(\varphi) \sec(\delta_1) \cos(H)$$

$$\Delta(\delta_4) = 0'',320 \cos(\varphi) \sin(\delta_1) \sin(H)$$

dove con φ si indica la latitudine del luogo di osservazione e **H** l'angolo orario della **Stella** osservata.

Parallasse Geocentrica (Diurna)

La **Parallasse Geocentrica (Diurna)**, analogamente a quella **Annua**, è riferita allo spostamento angolare massimo di una **Stella** rispetto ad una posizione media, dovuto al movimento dell'osservatore sulla **Terra** per effetto della rotazione attorno all'asse polare. Anche in questo caso lo spostamento avviene su di una traiettoria genericamente ellittica e non supera i **30 microarcsec** per la **Stella** più vicina a noi, quantità ovviamente trascurabile per i nostri scopi.

Polodia

La **Polodia** invece è quell'effetto per cui l'asse istantaneo di rotazione della **Terra** non essendo fisso sulla crosta terrestre, descrive su di essa in poco più di un anno un cerchio irregolare rispetto ad un polo medio con un raggio di una decina di metri. Va ricordato che questo fenomeno non comporta un cambiamento delle coordinate apparenti delle **Stelle** in quanto è la crosta terrestre che si muove rispetto al Polo Istantaneo, ma cambiano però i valori della longitudine e latitudine del luogo di una quantità che non supera i **0'',3**. In conseguenza di ciò variano anche le distanze zenitali e gli azimut delle **Stelle** di quantità trascurabili ai fini pratici. Queste modificano solo le coordinate equatoriali osservate (quelle apparenti non cambiano) per via della **rifrazione differenziale massima** esistente tra due punti che distano su di un meridiano a non più di **0'',3** (**0'',04** per un oggetto a distanza zenitale di **89°**).

Deflessione Relativistica Della Luce

Un ultimo effetto concettualmente importante ma di scarsa entità per gli scopi del nostro lavoro è quello dovuto alla deflessione relativistica della luce proveniente dalle **Stelle** quando queste si trovano prospettivamente vicine al **Sole**.

È risaputo che un intenso campo gravitazionale, come quello del **Sole** ad esempio, può far deviare la luce di una **Stella** angularmente vicina di una quantità che a mezzo grado dal **Sole** ammonta a circa **1 arcsec**, mentre a **90°** è di soli **0'',004**.

Ovviamente, dal punto di vista pratico, questo fenomeno lo possiamo considerare trascurabile in quanto è praticamente impossibile osservare da **Terra Stelle** vicine al **Sole** di pochi gradi, data la forte diffusione della luce solare causata dalla nostra atmosfera che ne offusca la visione.

D'altra parte se ci troviamo in condizioni di crepuscolo, quando il **Sole** è sotto l'orizzonte e la **Stella** dista angularmente di **90°** ed oltre, questa può essere osservata ma gli effetti relativistici di deflessione come detto prima diventano trascurabili.

Infatti, le variazioni in α e δ dovute a questo fenomeno si possono riassumere nelle seguenti formule (in arcsec):

$$\Delta(\alpha_5) = 0'',00407 [\cos(\delta) \sin(\alpha_1 - \alpha)] / [(1 - \cos(\Theta)) \cos(\delta_1)]$$

$$\Delta(\delta_5) = 0'',00407 [\sin(\delta_1) \cos(\delta) \cos(\alpha_1 - \alpha) - \cos(\delta_1) \sin(\delta)] / (1 - \cos(\Theta))$$

dove α e δ sono le coordinate equatoriali del Sole e Θ è l'elongazione della **Stella** dal Sole secondo la relazione:

$$\cos(\Theta) = \sin(\delta_1) \sin(\delta) + \cos(\delta_1) \cos(\delta) \cos(\alpha_1 - \alpha)$$

COORDINATE DI PUNTAMENTO ALLA DATA DI OSSERVAZIONE

A questo punto con tutte le correzioni $\Delta(\alpha)$ e $\Delta(\delta)$ precedenti otteniamo le **Coordinate Equatoriali Topocentriche**, cioè quelle che effettivamente si dovrebbero puntare al telescopio, se non ci fosse l'atmosfera, nel luogo considerato, secondo la relazione:

$$\alpha_T = \alpha_1 + \Delta(\alpha_1) + \Delta(\alpha_2) + \Delta(\alpha_3) + \Delta(\alpha_4) + \Delta(\alpha_5)$$

$$\delta_T = \delta_1 + \Delta(\delta_1) + \Delta(\delta_2) + \Delta(\delta_3) + \Delta(\delta_4) + \Delta(\delta_5)$$

Pertanto se si vogliono le vere coordinate da puntare al telescopio occorre considerare anche l'effetto dovuto alla **rifrazione atmosferica**. Questa ci permette di calcolare di quanto viene modificata la distanza zenitale di una **Stella** e di come, a ritroso, vengono modificate le **coordinate equatoriali topocentriche** poc' anzi citate.

Poiché un modello di atmosfera perfettamente corretto non esiste, in quanto come è ben noto l'indice di rifrazione dell'atmosfera varia in funzione, della posizione dell'oggetto rispetto all'orizzonte, della temperatura dell'aria, della sua umidità, della lunghezza d'onda secondo cui la **Stella** emette, della pressione atmosferica dell'altezza del luogo della sua posizione geografica ecc., ci siamo avvalsi delle tabelle e formule empiriche riportate nel **Nautical Almanac** per poter quantificare quest'ultima e consistente correzione da apportare alla **coordinate topocentriche**.

Per poter usare queste **Tabelle** occorre avere le **coordinate alto-azimutali apparenti** della **Stella** che si ricavano da quelle **Equatoriali Topocentriche** per mezzo delle seguenti relazioni :

$$\cos(z) = \sin(\varphi) \sin(\delta_T) + \cos(\varphi) \cos(\delta_T) \cos(H_T)$$

$$\sin(A) = \cos(\delta_T) \sin(H_T) / \sin(z)$$

dove con (z) si indica la **Distanza Zenitale** della **Stella**, con (A) l'**Azimut** della **Stella**, contato in senso positivo dal meridiano verso **Ovest** e negativo verso **Est**, mentre con δ_T e H_T si sono indicati rispettivamente la **Declinazione** e l'**angolo orario** della **Stella** dedotti dalle **Coordinate Topocentriche**.

Con il valore di (z) è possibile calcolarsi tramite la **Tabella** tratta dalle **Effemeridi del Nautical Almanac** il valore della rifrazione astronomica normale R_0 (cioè quella che si avrebbe a livello del mare con una pressione di 760 mm di mercurio e 0°centigradi di temperatura dell'aria).

Con le due formule empiriche seguenti si ottiene il fattore di correzione (A) in funzione della temperatura dell'aria T_A del luogo e il fattore (B) in funzione della pressione barometrica P_B del luogo, rapportata ad una latitudine φ di 45°, secondo le relazioni:

$$A = -0,00349512 (T_A - 10^\circ) - 0,0369$$

$$B = 0,00130807 (P_B - 710) - 0,0658$$

In un'altra **Tabella** del **Nautical Almanac** è riportato il fattore α funzione della temperatura dell'aria e della distanza zenitale **topocentrica** (per distanze zenitali maggiori di 45°) mentre in un'altra **Tabella** ancora il fattore funzione della rifrazione normale.

Sintetizzando in una formula tutte queste correzioni si ha che la **rifrazione astronomica** complessiva risulta data da:

$$R = R_0(1 + A\alpha)(1 + B\beta)$$

Dove R_0 è la rifrazione normale.

A questo punto sottraendo a z il valore di R così trovato si ottiene la distanza zenitale veramente osservata nel luogo considerato.

L'ultimo passo da compiere è quello di ritornare a coordinate equatoriali reali di puntamento dalle coordinate alto-azimutali corrette per la rifrazione atmosferica.

Il passaggio è dato dalle seguenti relazioni di trigonometria sferica:

$$\sin(\delta_p) = \cos(z_p) \sin(\varphi) - \sin(z_p) \cos(a_p) \cos(\varphi)$$

$$\sin(H_p) = \sin(z_p) \sin(a_p) / \cos(\delta_p)$$

dove con il suffisso p si indicano le coordinate di puntamento.

Dal valore di (H_p) si ottiene finalmente la coordinata α_p sottraendola dal tempo siderale θ del luogo di osservazione secondo la relazione:

$$\alpha_p = \theta - H_p$$

Concludendo il passaggio dalle **Coordinate Equatoriali Baricentriche Medie dell'Equinozio Medio J2000,0 Epoca J2000,0** a quelle che effettivamente si debbono puntare, alla consolle del telescopio in un certo istante della notte, può sintetizzarsi con la sequenza dei seguenti fenomeni astronomici che alterano le coordinate di partenza:

- **Passaggio da Coordinate Equatoriali Baricentriche Medie Equinozio Medio J2000 ed Epoca J2000,0 allo stesso Equinozio però all'Epoca della Data di Osservazione. Questa trasformazione contempla l'utilizzo delle formule che calcolano i **Moti Propri delle Stelle**.**
- **Passaggio da Coordinate Equatoriali Baricentriche Medie (Equinozio J2000,0 e Epoca di osservazione reale) a Coordinate Equatoriali Baricentriche Medie riferite all'Equinozio Medio e all'Epoca della Data di Osservazione. Tale passaggio contempla l'utilizzo delle formule che calcolano la **Precessione Generale** da un'epoca all'altra per una Stella supposta fissa (senza Moto Proprio).**
- **Passaggio da Coordinate Equatoriali Baricentriche Medie alla Data ed Epoca di Osservazione a Coordinate Equatoriali Eliocentriche Vere sempre alla Data di Osservazione. Tale trasformazione prende in considerazione il fenomeno della **Nutazione** che fa oscillare periodicamente l'equinozio medio con periodo 18,6 anni.**
- **Passaggio da Coordinate Equatoriali Eliocentriche Vere a Coordinate Apparenti sempre alla Data di Osservazione. Questo passaggio prende in considerazione due fenomeni e cioè **l'Aberrazione Annuale e la Parallaxe Annuale**. Con tale trasformazione ci si porta dal centro del Sole al centro della Terra.**
- **Passaggio da Coordinate Equatoriali Apparenti a Coordinate Topocentriche. Questo passaggio contempla il fenomeno **dell'Aberrazione Diurna e della Parallaxe Geocentrica nonché il fenomeno dello spostamento del Polo dovuto alla Polodia e alla Deflessione Relativistica della Luce**. Queste trasformazioni, tutte di piccola entità se non addirittura trascurabili, ci portano sulla superficie di una Terra senza atmosfera.**
- **L'ultimo passaggio è quello per cui si considera anche **l'influenza dell'atmosfera terrestre** sul cambiamento delle coordinate. Questa trasformazione permette di calcolarsi le**

coordinate alto-azimutali teoriche, cioè quelle che si avrebbero se sulla Terra non ci fosse atmosfera, quindi con le tabelle e le formule della rifrazione si arriva alle medesime coordinate corrette per tale fenomeno. Con un procedimento a ritroso si passa infine dalle coordinate alto-azimutali a quelle equatoriali effettivamente osservate e cioè a quelle che si debbono impostare al telescopio.

Come accennato nell'introduzione molti dei fenomeni che alterano le coordinate di puntamento di un telescopio sono di piccola entità se paragonati al fenomeno della rifrazione, che specialmente per oggetti vicini all'orizzonte è difficilmente quantificabile. Tuttavia possiamo ragionevolmente affermare che le coordinate di puntamento ottenute con il metodo sopra esposto dovrebbero essere accurate a qualche centesimo di arcsec per oggetti alti sull'orizzonte e con declinazioni non troppo vicine al polo, mentre l'accuratezza dovrebbe decrescere di circa un ordine di grandezza per oggetti bassi sull'orizzonte e/o vicini al polo **Nord Celeste**.

Con tale situazione, l'accuratezza fornita nelle coordinate di puntamento utilizzando il metodo sopra esposto dovrebbe garantire non solo una corretta puntata degli oggetti osservati, ma anche servire come mezzo per la valutazione degli errori ottico-meccanici insiti nel telescopio **TNG**.

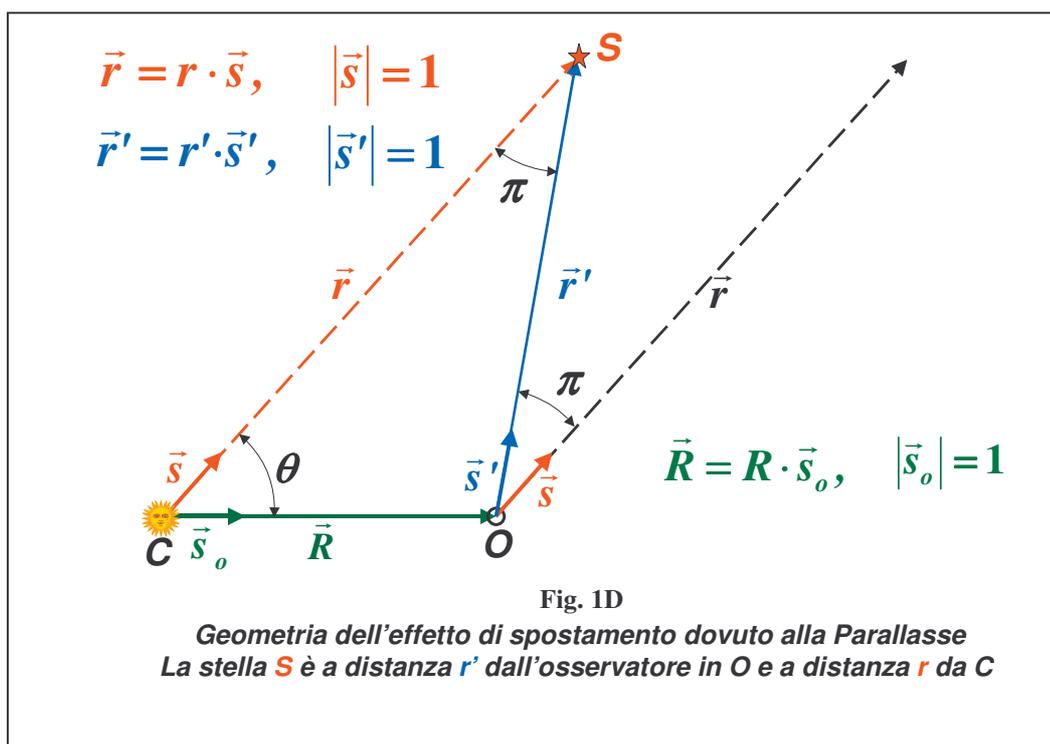
APPENDICE D

Descrizione Vettoriale dello Spostamento Apparente delle Stelle Dovuto alla Parallasse (Spostamento Parallattico)

In **Astronomia Fondamentale** si misurano angoli e le loro eventuali variazioni sulla **Sfera Celeste** (ricordiamo che la **Sfera Celeste** è quella particolare sfera di raggio unitario). In termini vettoriali diremo che si misurano direzioni (vettori unitari o versori) e le loro eventuali variazioni.

Se la posizione della Stella **S** (vedi **Figura 1D**) rispetto all'osservatore standard (posto ad esempio sul **Sole** o nel baricentro del sistema solare) situato in **C** è data dal vettore \vec{r} , quella vista dall'osservatore terrestre (in **O**) è :

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R} \quad (1)$$



L'equazione vettoriale è esatta e descrive appunto l'effetto sulla posizione delle **Stelle** quando si cambia origine del sistema di coordinate a causa della distanza finita delle **Stelle** da **C** (oppure da **O**). Quando **C** è nel baricentro del sistema solare e **O** è l'osservatore terrestre, allora è sempre (nel caso di oggetti fuori del nostro sistema solare, cioè per le **Stelle**):

$$R \ll r \cong r'$$

L'equazione (1) può essere riscritta come (vedi **Figura 1D**):

$$\mathbf{r}' \vec{s}' = r \vec{s} - R \vec{s}_o$$

dove $\vec{s}, \vec{s}', \vec{s}_o$ sono vettori unitari (versori).

Prendendo il prodotto vettoriale (sinistro) di ambo i membri per \vec{s} si ha (\times = simbolo di prodotto vettoriale):

$$\vec{s} \times (\mathbf{r}' \vec{s}') = \vec{s} \times [r \vec{s} - R \vec{s}_o] = r(\vec{s} \times \vec{s}) - R(\vec{s} \times \vec{s}_o) = -R(\vec{s} \times \vec{s}_o)$$

Ripetendo la stessa operazione vettoriale precedente si ottiene:

$$\vec{s} \times \left[\vec{s} \times (\mathbf{r}' \vec{s}') \right] = -R \vec{s} \times (\vec{s} \times \vec{s}_o)$$

spostando lo scalare \mathbf{r}' fuori parentesi quadra si ha:

$$\mathbf{r}' \vec{s} \times (\vec{s} \times \vec{s}') = -R \vec{s} \times (\vec{s} \times \vec{s}_o)$$

Applicando ora al primo membro la proprietà del doppio prodotto vettoriale:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

si ha:

$$\mathbf{r}' [\vec{s}(\vec{s} \cdot \vec{s}') - \vec{s}'(\vec{s} \cdot \vec{s})] = -R \vec{s} \times (\vec{s} \times \vec{s}_o)$$

semplificando e portando \mathbf{r}' a secondo membro:

$$[\vec{s}(\vec{s} \cdot \vec{s}') - \vec{s}'] = -\frac{R}{\mathbf{r}'} \vec{s} \times (\vec{s} \times \vec{s}_o)$$

cambiando inoltre il segno ad ambo i membri si ha:

$$[\vec{s}' - \vec{s}(\vec{s} \cdot \vec{s}')] = \frac{R}{\mathbf{r}'} \vec{s} \times (\vec{s} \times \vec{s}_o) \quad (2)$$

La relazione (2) è, come la (1), esatta.

Vediamo ora come utilizzare l'ipotesi $R \ll r$ per ottenere una relazione approssimata al prim'ordine in R/r .

L'angolo in S (alla **Stella**) di **Figura 1D**, che indichiamo con π è sempre dell'ordine di R/r per cui:

$$\vec{s} \cdot \vec{s}' = \cos \pi = 1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} \dots$$

pertanto al prim'ordine in $\pi \cong R/r$ sarà:

$$\vec{s} \cdot \vec{s}' \cong 1 \quad (3)$$

Vediamo ora di valutare il fattore R/r' al secondo membro della (2).

Indichiamo con θ l'angolo in C del triangolo OCS di **Figura 1D**. Vogliamo esprimere la distanza r in funzione della distanza r' da O (verifica su **Figura 1D**):

$$r = r' \cos \pi + R \cos \theta$$

poiché $R/r \cong \pi^{rad} \ll 1$ allora

$$r = r' + R \cos \theta$$

al prim'ordine in R/r . Dunque

$$r' = r \left(1 - \frac{R}{r} \cos \theta \right)$$

A questo punto siamo pronti a valutare il rapporto R/r' dividendo ambo i membri dell'equazione precedente per R , facendone l'inversione e ponendo $k = \frac{R}{r} \cos \theta \ll 1$ come costante:

$$\frac{R}{r'} = \frac{R}{r(1-k)} = \left(\frac{R}{r} \right) \frac{1}{1-k}$$

Sviluppando al prim'ordine in k abbiamo:

$$\frac{1}{1-k} \cong 1+k \quad \text{da cui si ottiene:}$$

$$\frac{R}{r'} \cong \frac{R}{r} \left(1 + \frac{R}{r} \cos \theta \right) \quad \text{ovvero:}$$

$$\frac{R}{r'} \cong \frac{R}{r} + \left(\frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta$$

perciò al prim'ordine in R/r possiamo dire che :

$$\frac{R}{r'} \cong \frac{R}{r} \quad (4)$$

La (2) diventa quindi, utilizzando la (3) e la (4):

$$\vec{s}' - \vec{s} = \frac{R}{r} \vec{s} \times (\vec{s} \times \vec{s}_o)$$

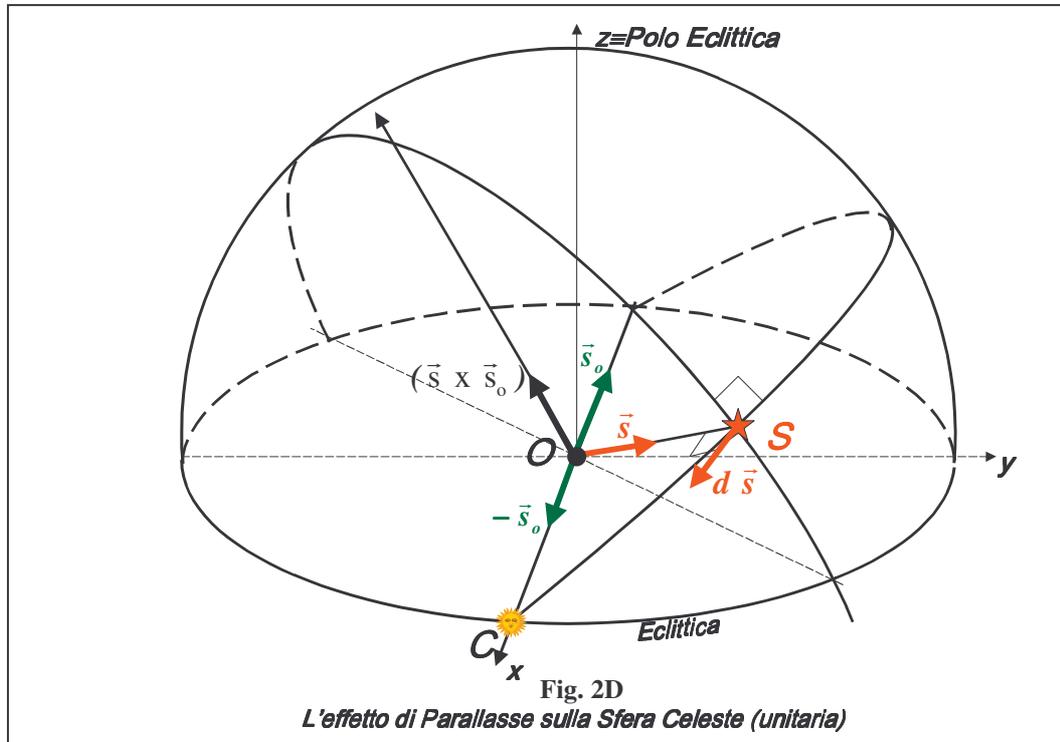
e posto $d\vec{s} \equiv \vec{s}' - \vec{s}$

si ha in definitiva, al prim'ordine in R/r

$$d\vec{s} = \frac{R}{r} \vec{s} \times (\vec{s} \times \vec{s}_o) \quad (5)$$

La (5) fornisce la variazione della direzione di osservazione della **Stella S** (il versore \vec{s}) dovuto all'effetto di parallasse, cioè quando si passa da un osservatore centrato in O spostato di \vec{R} da

quello in C . L'effetto all'ordine R/r , rappresentato dal vettore variazione $d\vec{s}$, è perpendicolare alla direzione \vec{s} , come si deduce dalla (5). L'equazione (5), coinvolgendo solo direzioni, si può rappresentare sulla sfera **Celeste** (unitaria), con cui siamo familiari, come illustrato in **Figura 2D** in cui $d\vec{s}$ è tangente alla sfera **Celeste** in S .



Dato che si sta trattando l'effetto di parallasse associato alla distanza **Terra-Sole** ($O-C$), viene naturale rappresentare i versori \vec{s} e \vec{s}_0 nel sistema di coordinate eclittico visto nelle pagine precedenti ed utilizzato nel costruire la **Figura 2D**.

Si ha pertanto:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \beta \\ \sin \lambda \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{s}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda_0 \cos \beta_0 \\ \sin \lambda_0 \cos \beta_0 \\ \sin \beta_0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

dove con (λ, β) indichiamo le coordinate eclittiche della **Stella S** e con (λ_0, β_0) quelle della **Terra** ad un generico tempo t . Naturalmente si ha che le coordinate eclittiche del Sole ($\lambda_\ominus, \beta_\ominus=0$) sono tali che $\lambda_\ominus = \lambda_0 + \pi$ e $\beta_\ominus = \beta_0 = 0$, pertanto:

$$\begin{aligned} \cos \lambda_\ominus &= -\cos \lambda_0 \\ \sin \lambda_\ominus &= -\sin \lambda_0 \end{aligned}$$

Definiamo ora due nuovi versori, uno (l_λ) tangente alla sfera unitaria in S secondo il parallelo passante per S e diretto nel senso delle λ crescenti. L'altro (l_β) tangente in S secondo il meridiano passante per S e diretto nel senso delle β crescenti (vedi **Figura 3D**).

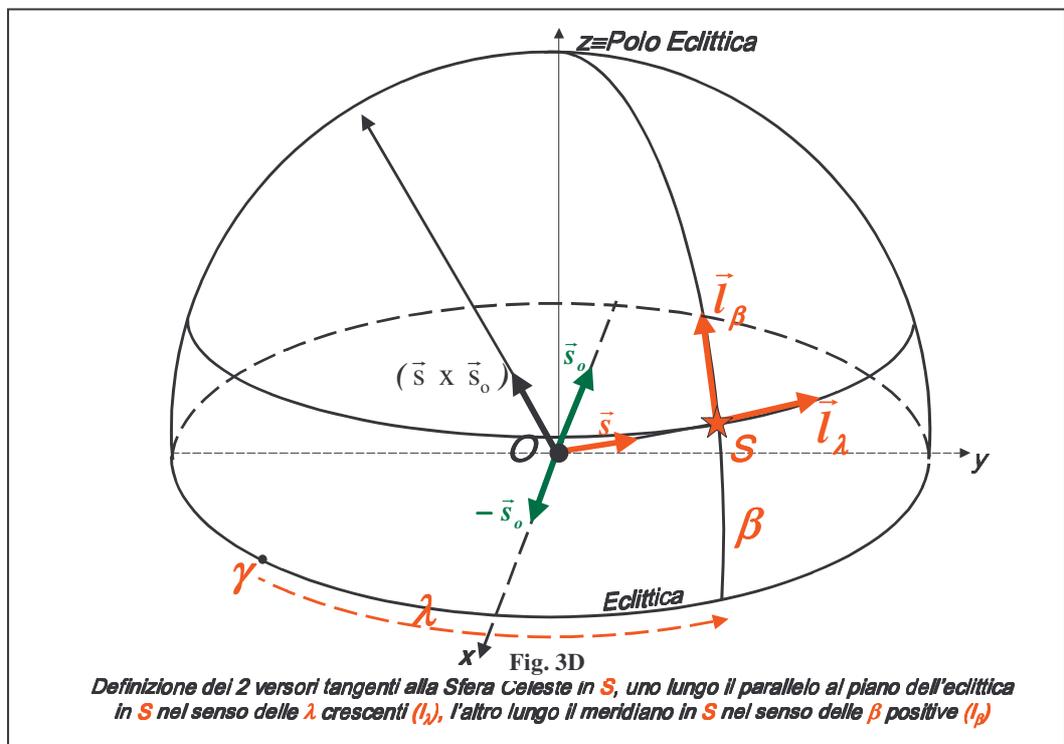
Dalle definizioni risulta che (\mathbf{l}_λ) è nella direzione che indica variazioni della direzione \bar{s} dovuti a spostamenti in λ a β costante; mentre (\mathbf{l}_β) è nella direzione di sole variazioni in β di S .

Da quanto detto risulta semplice derivare le espressioni di (\mathbf{l}_λ) e (\mathbf{l}_β) in coordinate eclittiche. Nel caso di (\mathbf{l}_λ) abbiamo dalle (6):

$$\left(\frac{d\bar{s}}{d\lambda}\right) = \frac{d}{d\lambda} \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \beta \\ \sin \lambda \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \cos \beta \\ \cos \lambda \cos \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

come si vede il vettore $\left(\frac{d\bar{s}}{d\lambda}\right)$ non è unitario; per normalizzarlo occorre dividere per $\cos \beta$, per cui:

$$\bar{l}_\lambda = \frac{1}{\cos \beta} \left(\frac{d\bar{s}}{d\lambda}\right) = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7a)$$



Procediamo analogamente per \bar{l}_β :

$$\left(\frac{d\bar{s}}{d\beta}\right) = \begin{pmatrix} -\cos \lambda \sin \beta \\ -\sin \lambda \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}$$

che è già normalizzato, per cui:

$$\vec{l}_\beta = \begin{pmatrix} -\cos \lambda \sin \beta \\ -\sin \lambda \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix} \quad (7b)$$

Diamo ora l'espressione dello spostamento differenziale $d\vec{s}$ al primo membro della (5) in funzione delle coordinate eclittiche. Prendendo il differenziale totale della prima delle (6) si ha:

$$d\vec{s} = \begin{pmatrix} dx(\lambda, \beta) \\ dy(\lambda, \beta) \\ dz(\lambda, \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \cos \beta d\lambda - \cos \lambda \sin \beta d\beta \\ \cos \lambda \cos \beta d\lambda - \sin \lambda \sin \beta d\beta \\ \cos \beta d\beta \end{pmatrix} \quad (8)$$

Vogliamo ricordare che dalla definizione di (l_λ) e (l_β) si vede che qualsiasi vettore tangente in S si può scomporre in quelle due direzioni, cioè in una componente in longitudine e latitudine **Eclittica**. Se indichiamo con \vec{K} un vettore tangente in S saranno:

$$\vec{K} \cdot \vec{l}_\lambda \quad \text{e} \quad \vec{K} \cdot \vec{l}_\beta$$

Prima di trovare la componente longitudinale, $d\vec{s} \cdot \vec{l}_\lambda$, e quella in latitudine $d\vec{s} \cdot \vec{l}_\beta$ riscriviamo la (5) applicando la regola del doppio prodotto vettoriale:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

si ha:

$$d\vec{s} = \left(\frac{R}{r} \right) [\vec{s}(\vec{s} \cdot \vec{s}_o) - \vec{s}_o(\vec{s} \cdot \vec{s})]$$

ovvero

$$d\vec{s} = \left(\frac{R}{r} \right) [\vec{s}(\vec{s} \cdot \vec{s}_o) - \vec{s}_o] \quad (5\text{-bis})$$

Calcoliamo ora la componente lungo λ dello spostamento $d\vec{s}$ moltiplicando ambo i membri della (5-bis) per l_λ

$$d\vec{s} \cdot \vec{l}_\lambda = \left(\frac{R}{r} \right) [(\vec{s} \cdot \vec{s}_o) \vec{s} \cdot \vec{l}_\lambda - \vec{s}_o \cdot \vec{l}_\lambda] \quad (9);$$

$$d\vec{s} \cdot \vec{l}_\lambda = \left(-\sin \lambda \cos \beta d\lambda - \cos \lambda \sin \beta d\beta \right) (-\sin \lambda) + \left(\cos \lambda \cos \beta d\lambda - \sin \lambda \sin \beta d\beta \right) (\cos \lambda) + 0$$

$$d\vec{s} \cdot \vec{l}_\lambda = \left(\sin^2 \lambda \cos \beta d\lambda + \cos \lambda \sin \lambda \sin \beta d\beta \right) + \left(\cos^2 \lambda \cos \beta d\lambda - \sin \lambda \cos \lambda \sin \beta d\beta \right)$$

$$d\vec{s} \cdot \vec{l}_\lambda = \cos \beta \, d\lambda \quad (\text{primo membro della (9)})$$

Ora calcoliamo il secondo membro della (9):

$$\vec{s} \cdot \vec{s}_o = \cos \lambda \cos \beta \cos \lambda_o \cos \beta_o + \sin \lambda \cos \beta \sin \lambda_o \cos \beta_o + \sin \beta \sin \beta_o$$

e sostituendo $\sin \lambda_o = -\sin \lambda_\theta$ e $\cos \lambda_\theta = -\cos \lambda_o$ e $\beta_o = \beta_\theta = 0$

$$\begin{aligned} \vec{s} \cdot \vec{s}_o &= \cos \lambda \cos \beta \cos \lambda_o + \sin \lambda \cos \beta \sin \lambda_o = \\ &= -\cos \lambda \cos \beta \cos \lambda_\theta - \sin \lambda \cos \beta \sin \lambda_\theta \end{aligned}$$

$$\vec{s} \cdot \vec{l}_\lambda = -\cos \lambda \cos \beta \sin \lambda + \sin \lambda \cos \lambda \cos \beta = 0$$

(come risultava anche dalla definizione di l_λ !)

$$\vec{s}_o \cdot \vec{l}_\lambda = \cos \lambda_\theta \sin \lambda - \sin \lambda_\theta \cos \lambda$$

Mettendo insieme tutte le espressioni parziali trovate si ha:

$$\cos \beta \, d\lambda = \left(\frac{R}{r} \right) \left[0 - \cos \lambda_\theta \sin \lambda + \sin \lambda_\theta \cos \lambda \right]$$

ma

$$(\sin \lambda \cos \lambda_\theta - \cos \lambda \sin \lambda_\theta) = \sin(\lambda - \lambda_\theta)$$

per cui:

$$d\lambda = -\left(\frac{R}{r} \right) \sec \beta \sin(\lambda - \lambda_\theta) \quad (10)$$

Calcoliamo ora la componente lungo β dello spostamento parallattico $d\vec{s}$ moltiplicando ambo i membri della (5-bis) per l_β

$$d\vec{s} \cdot \vec{l}_\beta = \left(\frac{R}{r} \right) \left[(\vec{s} \cdot \vec{s}_o) \vec{s} \cdot \vec{l}_\beta - \vec{s}_o \cdot \vec{l}_\beta \right]$$

per via dell'ortogonalità di \vec{s} con \vec{l}_β il loro prodotto scalare è nullo ($\vec{s} \cdot \vec{l}_\beta = 0$) quindi:

$$d\vec{s} \cdot \vec{l}_\beta = -\left(\frac{R}{r} \right) (\vec{s}_o \cdot \vec{l}_\beta) \quad (9 \text{ bis})$$

Il primo membro si può scrivere:

$$\begin{aligned}
d\vec{s} \cdot \vec{l}_\beta &= \left(-\sin \lambda \cos \beta \, d\lambda - \cos \lambda \sin \beta \, d\beta \right) \begin{pmatrix} -\cos \lambda & \sin \beta \end{pmatrix} + \\
&+ \left(\cos \lambda \cos \beta \, d\lambda - \sin \lambda \sin \beta \, d\beta \right) \begin{pmatrix} -\sin \lambda & \sin \beta \end{pmatrix} + \\
&+ \left(\cos \beta \, d\beta \right) \begin{pmatrix} \cos \beta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\vec{s} \cdot \vec{l}_\beta &= \sin \lambda \cos \beta \sin \beta \cos \lambda \, d\lambda + \cos^2 \lambda \sin^2 \beta \, d\beta + \\
&- \sin \lambda \cos \beta \sin \beta \cos \lambda \, d\lambda + \sin^2 \lambda \sin^2 \beta \, d\beta + \\
&+ \cos^2 \beta \, d\beta
\end{aligned}$$

$$d\vec{s} \cdot \vec{l}_\beta = \sin^2 \beta \, d\beta (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) + \cos^2 \beta \, d\beta$$

Infine:

$$d\vec{s} \cdot \vec{l}_\beta = d\beta \quad (\text{primo membro della (9-bis).})$$

Al secondo membro abbiamo:

$$\vec{s}_o \cdot \vec{l}_\beta = (-\cos \lambda_\theta)(-\cos \lambda \sin \beta) + (-\sin \lambda_\theta)(-\sin \lambda \sin \beta) + 0$$

$$\vec{s}_o \cdot \vec{l}_\beta = \cos \lambda_\theta \cos \lambda \sin \beta + \sin \lambda_\theta \sin \lambda \sin \beta = \sin \beta (\sin \lambda \sin \lambda_\theta + \cos \lambda \cos \lambda_\theta)$$

e dalle formule di sottrazione si ha:

$$\vec{s}_o \cdot \vec{l}_\beta = \sin \beta \cos(\lambda - \lambda_\theta) \quad (\text{secondo membro della 9-bis})$$

Mettendo insieme si ha:

$$d\beta = -\left(\frac{R}{r}\right) \sin \beta \cos(\lambda - \lambda_\theta) \quad (11)$$

Mettendo insieme la (10) e la (11) e ricordando che R/r è l'angolo di parallasse annua π abbiamo che:

$$\begin{cases} d\lambda = -\pi \sec \beta \sin(\lambda - \lambda_\theta) \\ d\beta = -\pi \sin \beta \cos(\lambda - \lambda_\theta) \end{cases} \quad (12)$$

Visto che il Sole si muove nel suo moto annuale apparente allora $\lambda_\theta = \lambda_\theta(t)$ e la variazione $d\vec{s}$ descriverà una curva sulla sfera **Celeste** di cui le (12) sono le equazioni parametriche in coordinate eclittiche.

Vediamo di che curva si tratta eliminando il parametro λ_θ . Riscriviamo le (12) come:

$$\begin{cases} d\lambda \cos \beta = -\pi \sin(\lambda - \lambda_\theta) \\ \frac{d\beta}{\sin \beta} = -\pi \cos(\lambda - \lambda_\theta) \end{cases}$$

quindi elevando al quadrato le due equazioni e sommando membro a membro otteniamo:

$$d\lambda^2 \cos^2 \beta + \frac{d\beta^2}{\sin^2 \beta} = \pi^2$$

posto $d\lambda \cos \beta = x$ e $d\beta = y$ abbiamo:

$$\frac{x^2}{\pi^2} + \frac{y^2}{\pi^2 \sin^2 \beta} = 1 \quad (13)$$

La (13) rappresenta la curva annuale apparente tracciata da una **Stella S** a latitudine **Eclittica β** . La (13) è un'ellisse, l'**Ellisse di Parallasse**, percorsa da una **Stella** in un anno a causa dell'effetto di parallasse (R/r).

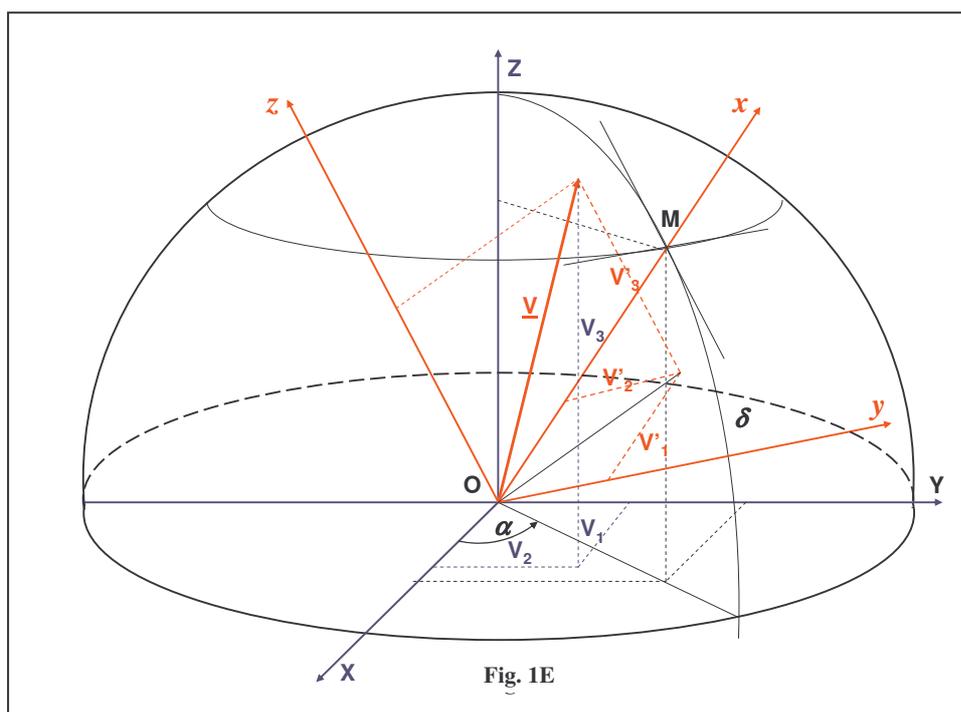
L'**Ellisse di Parallasse** ha semiasse maggiore π e semiasse minore $\pi \sin \beta$; l'eccentricità è dunque $\cos \beta$

APPENDICE E

Trattamento vettoriale rigoroso del calcolo delle coordinate equatoriali delle stelle tramite l'utilizzo dei loro Moti Propri

Prima di affrontare il calcolo delle coordinate equatoriali di una stella attraverso l'uso dei moti propri, in maniera rigorosa, utilizzando il calcolo vettoriale e matriciale, vediamo di prendere confidenza con le trasformazioni di coordinate da un sistema di assi ad un altro per mezzo di due rotazioni.

Prendiamo un punto M sulla sfera di centro O . Definiamo inoltre un sistema di assi rettangolare $(O;X,Y,Z)$, dove il punto M è individuato sia dalle componenti del vettore \underline{OM} , sia dalle sue coordinate angolari (α, δ) . Ad ogni punto M così definito associamo un sistema di coordinate rettangolari locali, centrato in O , essendo l'asse delle x quello lungo il vettore \underline{OM} , l'asse delle z quello parallelo alla tangente al meridiano passante per M e diretto nel senso delle δ crescenti. L'asse y completa il triedro in modo diretto. Esso è dunque parallelo alla tangente alla sfera in M nel piano del piccolo cerchio della sfera di asse OZ passante per M e diretta nel senso delle α crescenti (vedi **Figura 1E**)



Si passa quindi dal sistema di assi $(O;X,Y,Z)$ al sistema $(O;x,y,z)$ tramite due rotazioni $R_Z(\alpha), R_Y(-\delta)$. Quindi se con (V_1, V_2, V_3) e (V'_1, V'_2, V'_3) indichiamo rispettivamente le componenti di un vettore \underline{V} nel primo e nel secondo sistema, per passare dal primo al secondo si procede nel seguente modo (vedi **Figura 1E**). Si effettua dapprima una rotazione antioraria di un angolo α attorno all'asse Z , quindi una rotazione di un angolo δ attorno all'asse Y in senso orario, che si traduce, utilizzando il formalismo delle rotazioni **passive** già viste nell'**Appendice B**, nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1' \\ \mathbf{V}_2' \\ \mathbf{V}_3' \end{pmatrix} = \mathbf{R}(-\delta) \cdot \mathbf{R}(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{pmatrix}$$

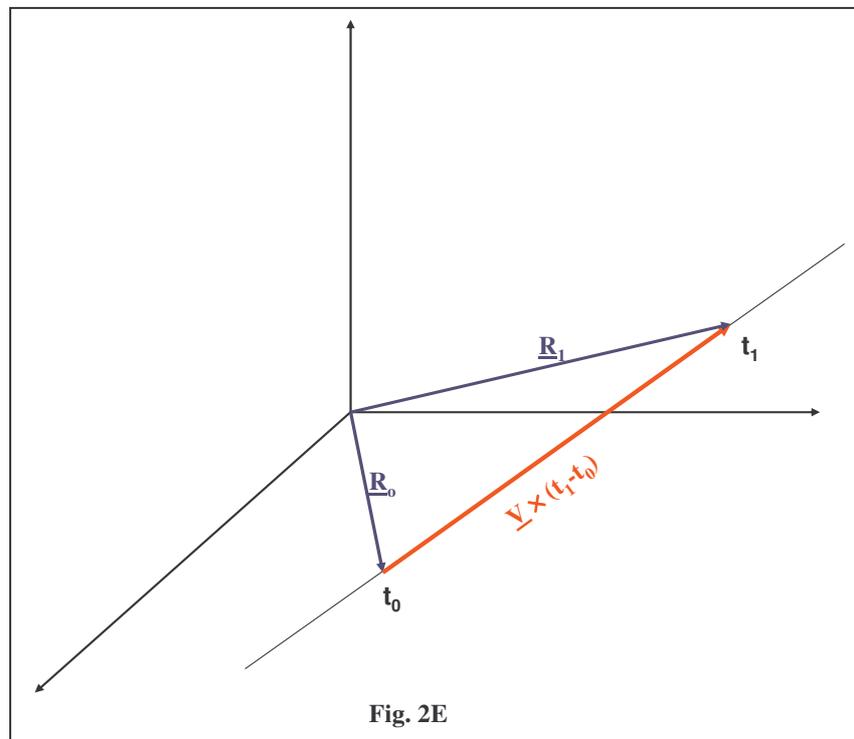
che sviluppata diventa:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1' \\ \mathbf{V}_2' \\ \mathbf{V}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & 0 & \sin \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \delta & 0 & \cos \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha & \cos \delta \sin \alpha & \sin \delta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\sin \delta \cos \alpha & -\sin \delta \sin \alpha & \cos \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{pmatrix}$$

dove \mathbf{R} è la matrice prodotto delle due rotazioni. Per passare invece dal secondo sistema al primo è sufficiente utilizzare la matrice trasposta \mathbf{R}^T (uguale alla sua inversa) invertendo le righe con le colonne nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R}^T \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1' \\ \mathbf{V}_2' \\ \mathbf{V}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha & -\sin \alpha & -\cos \alpha \sin \delta \\ \sin \alpha \cos \delta & \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \delta \\ \sin \delta & 0 & \cos \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1' \\ \mathbf{V}_2' \\ \mathbf{V}_3' \end{pmatrix}$$

Passando all'analisi rigorosa dei **Moti Propri** in forma vettoriale, la situazione in tutta la sua generalità è illustrata in **Figura 2E**

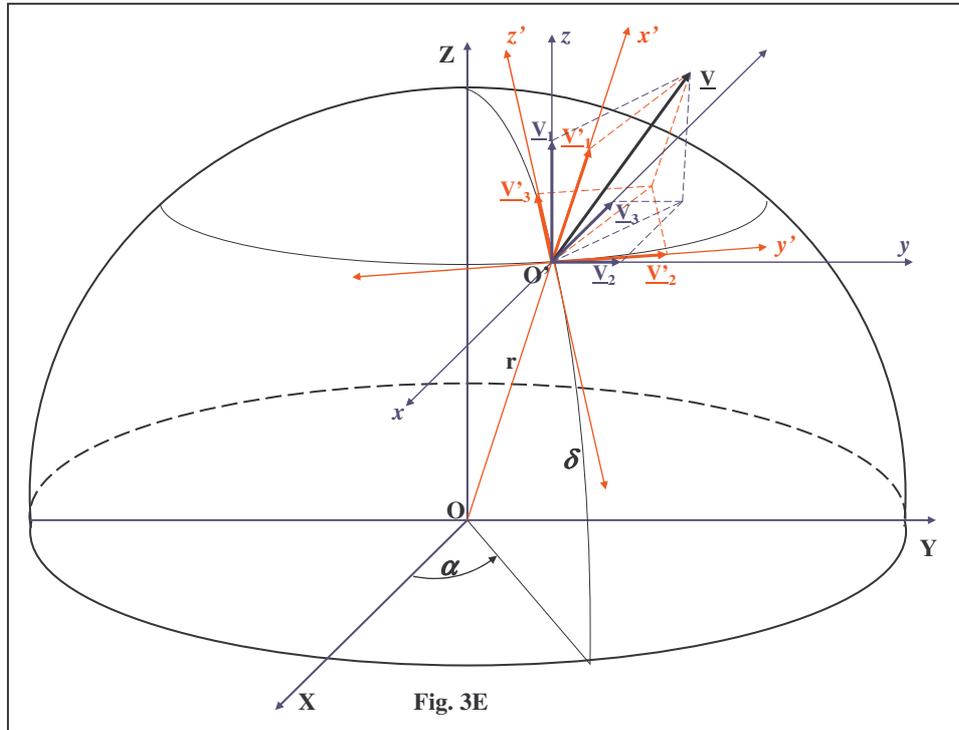


Il vettore \mathbf{R}_0 rappresenta il raggio vettore della stella all'istante iniziale (epoca del catalogo). Conoscendo il vettore velocità \mathbf{V} si ottiene il raggio vettore della stella all'istante \mathbf{t}_1 tramite la somma vettoriale:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V} \times (\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0)$$

Dando allora le componenti di $\underline{\mathbf{R}}_0$ e di $\underline{\mathbf{V}}$ in un sistema di assi, si deducono quelle di $\underline{\mathbf{R}}_1$ nello stesso sistema. Successivamente da $\underline{\mathbf{R}}_1$ si possono calcolare le coordinate sferiche α_1 e δ_1 . Supponiamo di avere a disposizione α_0 e δ_0 di una stella a t_0 ed in più $d\alpha/dt$ e $d\delta/dt$ (o messi in altra forma $\dot{\alpha}, \dot{\delta}$). La velocità radiale \dot{r} sia anch'essa nota.

A partire da questi tre dati sul moto stellare si possono calcolare le componenti del vettore $\underline{\mathbf{V}}$. Nel sistema locale legato alla stella (x',y',z'), le tre componenti di $\underline{\mathbf{V}}$ sono (vedi **Figura 3E**):



$$\begin{vmatrix} \mathbf{V}_1' \\ \mathbf{V}_2' \\ \mathbf{V}_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r \cdot \cos \delta \cdot \dot{\alpha} \\ r \cdot \dot{\delta} \end{vmatrix}$$

quindi le componenti di $\underline{\mathbf{V}}$ nel sistema ($O;X,Y,Z$) rispetto a quelle nel sistema (O',x,y,z) sono ottenute tramite la matrice \mathbf{R}^T vista in precedenza:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{vmatrix} = \mathbf{R}^T \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{V}_1' \\ \mathbf{V}_2' \\ \mathbf{V}_3' \end{vmatrix} = \mathbf{R}_Z(-\alpha) \cdot \mathbf{R}_Y(\delta) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{V}_1' \\ \mathbf{V}_2' \\ \mathbf{V}_3' \end{vmatrix}$$

Abbiamo però visto che nelle componenti \mathbf{V}'_2 e \mathbf{V}'_3 compare la distanza della stella che è generalmente mal conosciuta. Questo si può evitare normalizzando la relazione precedente facendo apparire il vettore direzione $\underline{\mathbf{U}}_0$ della stella all'istante t_0 :

$$\frac{\mathbf{R}}{r} = \underline{\mathbf{U}}_0 + \frac{\mathbf{V}}{r} \cdot (t_1 - t_0)$$

Il vettore nel membro di sinistra non è unitario, ma la sua direzione è ancora quella della stella all'istante t_1 . In più nel vettore velocità $\underline{\mathbf{V}}/r$ si ha ora a che fare con $\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r}$, $\dot{\alpha} \cdot \cos \delta$, $\dot{\delta}$. Così se la

stella è molto lontana la quantità $\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r}$ sarà molto piccola e la variazione della distanza della stella tra t_0 e t_1 avrà un effetto trascurabile. Al contrario questo termine sarà preso in considerazione nel calcolo. Questa situazione è generalmente inclusa nei calcoli di correzione al secondo ordine dell'effetto di prospettiva che sembra dare una accelerazione al moto proprio tangenziale. Il calcolo esatto dell'effetto di spostamento della stella porterà dunque ai passi seguenti:

- lettura dei dati : μ_α o $\dot{\alpha}$ in sec/secolo
- μ_δ o $\dot{\delta}$ in "/secolo
- V_r o \dot{r} in Km/sec
- parallasse π in secondi d'arco
- calcolo delle componenti del vettore $\frac{\mathbf{V}}{r}$ nel sistema locale in unità appropriate. Per esempio in rad/secolo
- valore di queste componenti nel sistema fisso (sistema equatoriale) per mezzo della matrice trasposta \mathbf{R}^T .
- calcolo del vettore direzione della stella all'istante t_0 a partire da α_0, δ_0
- calcolo delle componenti di $\underline{\mathbf{R}}/r$ all'istante t_1
- espressione delle nuove coordinate angolari α_1 e δ_1

La definizione stessa di moti propri in ascensione retta e declinazione conduce alle espressioni seguenti:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_0 + \mu_\alpha \cdot (t_1 - t_0) \\ \delta_1 = \delta_0 + \mu_\delta \cdot (t_1 - t_0) \end{cases}$$

Note.

- bisogna assicurarsi che tutte le quantità vettoriali siano prese nello stesso sistema di riferimento
- le coordinate della stella dopo la correzione di moto proprio danno la sua posizione ad un istante differente dall'epoca di catalogo, ma in un sistema d'assi che è lo stesso di quello del catalogo.

Facciamo un esempio pratico per verificare la differenza esistente tra il calcolo delle coordinate ottenute con un metodo approssimato al primo ordine rispetto a quello più rigoroso.

Immaginiamo di calcolare la posizione al **J2000.0** della stella **ϵ Ind** a partire dalle sue coordinate al **1950.0** nel sistema equatoriale **B1950.0**.

$$\alpha_0 = 21^{\text{h}}59^{\text{m}}33^{\text{s}},053$$

$$\delta_0 = -56^{\circ}59'33'',65$$

$$\mu_{\alpha} = 48,218 \text{ sec/secolo} \qquad \mu_{\delta} = -255'',545/\text{secolo}$$

$$\pi = 0'',285 \qquad V_r = -40,4 \text{ Km/sec}$$

Con $t_1 - t_0 = 0,5$ secoli e le equazioni di trasformazione di coordinate al primo ordine viste nel presente Corso si ottiene:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_0 + \mu_{\alpha} \cdot (t_1 - t_0) = 21^{\text{h}}59^{\text{m}}57^{\text{s}},162 \\ \delta_1 = \delta_0 + \mu_{\delta} \cdot (t_1 - t_0) = -57^{\circ}01'41'',42 \end{cases}$$

mentre applicando le trasformazioni al secondo ordine, con una procedura più lunga ma soprattutto molto più delicata a causa delle unità di misura, si ottiene:

$$\alpha_1 = 21^{\text{h}}59^{\text{m}}57^{\text{s}},200 \qquad \delta_1 = -57^{\circ}01'41'',35$$

Per questa stella vicina con una forte velocità radiale si vede che gli effetti di prospettiva introducono una variazione dell'ordine di $0'',1$ in declinazione e $0^{\text{s}},038=0'',57$ in ascensione retta. Questi effetti non sono trascurabili per la **Astrometria** di alta precisione che lavora a ordini di 10^{-3} secondi d'arco. Ma vediamo ora come si procede praticamente con le trasformazioni al secondo ordine per una stella molto nota già nell'antichità e cioè della stella **Sirio**, che notoriamente è la più brillante del firmamento. Questa stella serviva alla determinazione del nuovo anno egizio nell'Antico Egitto, osservandone il suo sorgere eliaco (cioè quando Sirio dopo un lungo periodo di invisibilità si osservava per la prima volta nei bagliori dell'alba poco prima del sorgere del Sole, o meglio quando questo si trovava ancora sotto l'orizzonte di circa una decina di gradi). E' dunque interessante calcolare le coordinate di Sirio ad un'epoca lontana, per esempio calcolare la durata tra due sorgere eliaci successivi.

Calcoliamo dunque le coordinate equatoriali di Sirio nel sistema d'assi 1950.0 all'anno -2650.0 cioè a 46 secoli fa.

$$\alpha_0 = 6^{\text{h}}42^{\text{m}}56^{\text{s}},7 = 100^{\circ},73625 \qquad \delta_0 = -16^{\circ}38'46'' = -16^{\circ},64611$$

$$\mu_{\alpha} = -3,79 \text{ sec/secolo} \qquad \mu_{\delta} = -121'',1/\text{secolo}$$

$$\dot{r} = -8 \text{ Km/s} \qquad \pi = 0'',375$$

$$\Delta t = t_1 - t_0 = 46$$

Con le trasformazioni al primo ordine si ottiene:

$$\Delta \alpha = \mu_{\alpha} \cdot \Delta t = 174^{\text{s}},36 = 0^{\circ},726$$

$$\Delta \delta = \mu_{\delta} \cdot \Delta t = 5570'',3 = 1^{\circ},547$$

da cui

$$\alpha_1 = 6^{\text{h}}45^{\text{m}}51^{\text{s}},1 \qquad \delta_1 = -15^{\circ}05'58''$$

Con il calcolo rigoroso si procede nel seguente modo.

Si determina il vettore direzione \underline{U}_0 in coordinate sferiche:

$$\underline{U}_0 = \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha_0 \cdot \cos \delta_0 \\ \sin \alpha_0 \cdot \cos \delta_0 \\ \sin \delta_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.17848 \\ 0.94132 \\ -0.28646 \end{vmatrix}$$

Le componenti del vettore \underline{V}/r in coordinate locali (Unità = radianti/secolo) sono, ricordando che $\pi=1/r$, **36.525** sono i giorni in un secolo, **86.400** sono i secondi in un giorno, **206.265** sono le Unità Astronomiche in un parsec e **150.000.000** sono i Km in una Unità Astronomica

$$\frac{\underline{V}'}{r} = \begin{vmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\dot{r}}{r} \\ \frac{r}{r} \cdot \cos \delta_0 \cdot \dot{\alpha} \\ \frac{r}{r} \cdot \dot{\delta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pi \cdot r \cdot 36.525 \cdot 86.400 / (206.265 \cdot 150.000.000) \text{ rad/secolo} \\ \mu_\alpha \cdot \cos \delta_0 \cdot 15 \cdot (3,14159 / (3.600 \cdot 180)) \text{ rad/secolo} \\ \mu_\delta \cdot (3,14159 / (3.600 \cdot 180)) \text{ rad/secolo} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3,156 \cdot 10^{-4} \\ -2,641 \cdot 10^{-4} \\ -5,871 \cdot 10^{-4} \end{vmatrix}$$

Il passaggio al sistema equatoriale comporta l'utilizzo della trasformazione:

$$\frac{\underline{V}}{r} = \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix} = \mathbf{R}^T \cdot \begin{vmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \delta_0 \cos \alpha_0 & -\sin \alpha_0 & -\cos \alpha_0 \sin \delta_0 \\ \sin \alpha_0 \cos \delta_0 & \cos \alpha_0 & -\sin \alpha_0 \sin \delta_0 \\ \sin \delta_0 & 0 & \cos \delta_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3,470 \cdot 10^{-4} \\ -4,126 \cdot 10^{-4} \\ -4,722 \cdot 10^{-4} \end{vmatrix}$$

Il vettore spostamento $\underline{D}/r = \underline{V}/r \cdot \Delta t$ in radianti sarà dato da:

$$\frac{\underline{D}}{r} = \begin{vmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3,470 \cdot 10^{-4} \\ -4,126 \cdot 10^{-4} \\ -4,722 \cdot 10^{-4} \end{vmatrix} \cdot (-46) = \begin{vmatrix} -1,596 \cdot 10^{-2} \\ 1,898 \cdot 10^{-2} \\ 2,172 \cdot 10^{-2} \end{vmatrix}$$

Il nuovo vettore direzione (non unitario) $\frac{\underline{R}}{r} = \underline{U}_0 + \frac{\underline{V}}{r} \cdot (t_1 - t_0)$ vale:

$$\frac{\underline{R}}{r} = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,19445 \\ 0,96030 \\ -0,26474 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{R}{r} \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \delta_1 \\ \frac{R}{r} \cdot \sin \alpha_1 \cdot \cos \delta_1 \\ \frac{R}{r} \cdot \sin \delta_1 \end{vmatrix}$$

dal rapporto R_2/R_1 si ricava il valore di α_1 , mentre dal rapporto R_3/R_2 noto α_1 si ricava il valore di δ_1 . Queste coordinate assumono rispettivamente il valore:

$$\alpha_1 = 6^{\text{h}}45^{\text{m}}47^{\text{s}},2$$

$$\delta_1 = -15^{\circ}07'13'',2$$

Lo scarto tra i due metodi raggiunge dunque i 2 primi d'arco. Questo metodo è sistematico, spedito, esatto e facile da memorizzare. Vantaggi che dovrebbero farlo preferire ai metodi differenziali del secondo ordine che mettono in gioco formule da far scappare un programmatore!

APPENDICE F

La Massa delle Stelle Binarie Visuali

(vedi sezione 19.5 del libro “Spherical Astronomy” di Robin M. Green, pagg. 478-481)

Come abbiamo detto all’inizio del corso, uno dei compiti dell’**Astronomia Fondamentale** è quello di determinare la **Massa delle Stelle** in modo il più possibile indipendente dai modelli stellari che, anzi, hanno bisogno delle loro determinazioni assolute per la loro validazione.

Abbiamo visto che per le **Stelle Binarie Visuali** (cioè quelle **Stelle** doppie per cui le due componenti sono angolarmente risolte) si misura la separazione angolare (ρ) tra le due componenti e l’angolo di posizione (θ) della secondaria (solitamente la componente meno luminosa) rispetto alla primaria, a partire dalla direzione del **Nord Celeste** verso **Est** (vedi **Figura 74**). In questo modo si mappa l’orbita relativa apparente, ovvero l’orbita relativa della secondaria attorno alla primaria proiettata sul piano tangente alla direzione osservatore-**Stella**.

Diverse sono le tecniche per ricostruire, attraverso il metodo dei minimi quadrati, l’orbita vera una volta data la serie temporale $[\rho(t), \theta(t)]$ costruita dalle misure di separazione ed angolo di posizione dell’orbita apparente ottenute direttamente al telescopio o con la tecnica micrometrica o con quella fotografica o con la più recente tecnica dei rivelatori a stato solido (CCD) (per maggiori dettagli su queste tecniche vedi nel testo al paragrafo “**Stelle Doppie Visuali**”).

Qui basta ricordare che questi metodi di ricostruzione forniscono le stime dei Periodi P (in anni) e dei semiassi maggiori delle orbite vere a (in secondi d’arco).

La massa totale del sistema $M_{TOT}=M_A+M_B$ (in masse solari) è quindi derivata dalla terza legge di Keplero scritta alla maniera “degli astronomi”:

$$M_{TOT} = \frac{a'^3}{P^2 \cdot \pi'^3} \quad (1)$$

dove con π' è indicata la parallasse trigonometrica del sistema binario in secondi d’arco. Quindi l’uso di questa equazione presuppone la conoscenza della sua distanza o almeno della sua misurabilità. Naturalmente ci sono diverse binarie e “l’orizzonte” (intendiamo con orizzonte quella distanza limite, in parsec, per cui l’errore relativo sulla $\pi'_{lim}=1/d_{lim}$, corrispondente cioè a $\sigma_{\pi'_{lim}}/\pi'_{lim}$, è dell’ordine del 10%) di queste misure dipende, come abbiamo detto, dalla precisione nella misura di π' da parte della particolare tecnica utilizzata: circa $1 \div 2$ millisecondi d’arco (mas) per le migliori tecniche da **Terra** (parallassi relative più correzione per la parallasse media delle **Stelle** di sfondo presumibilmente lontane) e minori del millisecondo d’arco per le tecniche spaziali che permettono la misura diretta delle **Parallassi Assolute** (missione **HIPPARCOS** e in futuro **GAIA**).

Nel caso in cui la binaria sia ad una distanza tale che una misura affidabile della sua parallasse risulti proibitiva, l’equazione (1) può essere riscritta per fornire una stima della parallasse del sistema:

$$\pi'' = \frac{a''}{P^{\frac{2}{3}} \cdot M_{TOT}^{\frac{1}{3}}} \quad (2)$$

una volta che le masse delle due **Stelle** siano state stimate dalla classificazione dei loro spettri. La parallasse espressa dall'equazione (2) viene chiamata **Parallasse Dinamica**.

Naturalmente la derivazione della massa dagli spettri presuppone l'esistenza di una calibrazione che deve essere stata effettuata utilizzando sistemi doppi per i quali la parallasse trigonometrica è disponibile, oppure la determinazione diretta delle masse è stata fatta con tecniche diverse da quella astrometrica come quella spettroscopica (binarie spettroscopiche) o quella fotometrica (binarie fotometriche o ad eclisse). Ad ogni modo la ragione per cui la **Parallasse Dinamica** (2) ancora oggi può dare un'utile informazione, anche se non molto precisa (vedi più avanti) sulla distanza della particolare binaria sta nel fatto che essa non è molto sensibile ad errori nel valore di M_{TOT} utilizzato.

Infatti, propagando sulla equazione (2) l'eventuale errore $\sigma_{M_{TOT}}$ sulla massa totale si ha:

$$\sigma_{\pi}^2 = \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{a''}{P^{\frac{2}{3}}} \cdot M_{TOT}^{-\frac{4}{3}} \right]^2 \cdot \sigma_{M_{TOT}}^2$$

ovvero:

$$\sigma_{\pi}^2 = \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{a''}{P^{\frac{2}{3}} \cdot M_{TOT}^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{M_{TOT}} \right]^2 \cdot \sigma_{M_{TOT}}^2$$

cioè dopo aver sostituito in parentesi quadra il valore di π si ha dopo alcuni passaggi :

$$\frac{\sigma_{\pi}}{\pi} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sigma_{M_{TOT}}}{M_{TOT}} \quad (3)$$

per cui dalla equazione (3), anche un errore del 30% sulla massa comporterebbe un errore sulla parallasse di solo il 10%.

Ad ogni modo l'equazione (1) può solo fornire la Massa Totale del sistema binario. Questo è tutto quello che ci si può aspettare dall'analisi dell'orbita relativa.

L'unica possibilità di determinare in che modo la massa totale si possa dividere in quella delle due componenti della **Stella Doppia** è nell'identificazione del **Centro di Massa (C.d.M.)** del sistema. Questo richiede di investigare il moto delle due componenti la binaria rispetto alle **Stelle** di sfondo (**Stelle** "lontane") allo stesso modo di quando abbiamo discusso della determinazione pratica delle parallasse relative (si veda la **Figura 66** riportata nel testo del presente corso).

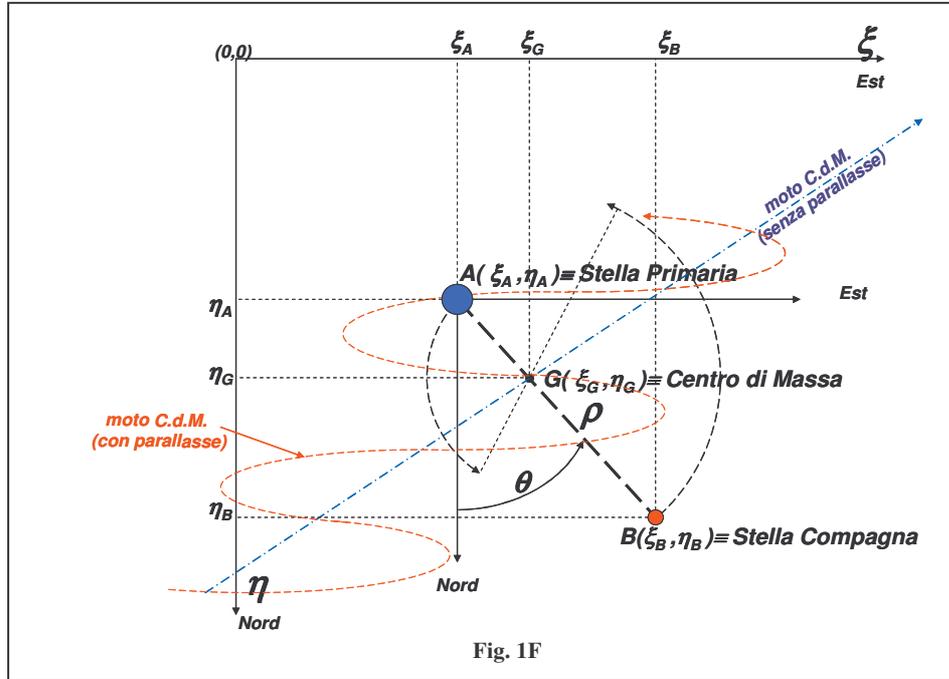
Per capire come avviene il moto delle 2 componenti rispetto alle **Stelle** di sfondo prendiamo in considerazione la **Figura 1F**.

In questa figura i punti **A** e **B** rappresentano la **Stella** primaria e la compagna del sistema binario visuale; **G** rappresenta il loro **Centro di Massa**. L'angolo di posizione θ in gradi e la separazione angolare ρ in secondi d'arco sono quantità misurate .

La separazione di G da A è dalla definizione di **Centro di Massa** :

$$M_A \cdot \overline{GA} = M_B \cdot \overline{GB}$$

da cui
$$\overline{GA} = \frac{M_B}{M_A} \cdot \overline{GB}$$



d'altra parte, sempre per definizione:

$$\overline{GB} = \rho - \overline{GA} \quad \text{quindi} \quad \overline{GA} = \frac{M_B}{M_A} \cdot (\rho - \overline{GA})$$

da cui si ricava con semplici passaggi che:

$$\overline{GA} = \frac{M_B}{M_A + M_B} \cdot \rho$$

Assumiamo ora che le coordinate standard della primaria (cioè le coordinate nel piano tangente alla direzione di osservazione verso il campo stellare che contiene la data **Stella**) siano misurate da una serie di immagini **CCD** prese in tempi diversi. Allora se le (ξ_G, η_G) rappresentano le coordinate standard del **Centro di Massa G** (che naturalmente non è visibile nelle immagini) si ha per la relazione precedente (vedi **Figura 1F**).

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_A = \xi_G - \overline{GA} \cdot \sin \vartheta = \xi_G - \frac{M_B}{M_A + M_B} \cdot \rho \cdot \sin \theta \\ \eta_A = \eta_G - \overline{GA} \cdot \cos \vartheta = \eta_G - \frac{M_B}{M_A + M_B} \cdot \rho \cdot \cos \theta \end{array} \right.$$

Naturalmente le coordinate del **Centro di Massa** dipendono dal tempo e sono incognite $(\xi_G, \eta_G) = (\xi_G(t), \eta_G(t))$. Inoltre il **Centro di Massa** sarà soggetto solo al moto proprio (rettilineo e uniforme) dovuto alla velocità spaziale del sistema binario e al moto apparente dovuto alla parallasse trigonometrica e al moto apparente dovuto alla **Parallasse Annuale**. Quindi la formula generale delle coordinate standard di **A** al tempo di osservazione **T** è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_A(t) = \xi_{0A} + \mu_\xi \cdot t + \pi \cdot P_\xi - \frac{M_B}{M_A + M_B} \cdot \rho \cdot \sin \theta \\ \eta_A(t) = \eta_{0A} + \mu_\eta \cdot t + \pi \cdot P_\eta - \frac{M_B}{M_A + M_B} \cdot \rho \cdot \cos \theta \end{array} \right. \quad (4)$$

dove con (ξ_{0A}, η_{0A}) è rappresentata la posizione di **A** ad una certa epoca di riferimento $T_0=0$, con **t** la differenza di tempo tra **T** e T_0 , con P_ξ e P_η i **Fattori Parallattici** già visti nel paragrafo delle **Parallasse Trigonometriche** e con μ_ξ e μ_η i moti propri di **G** lungo le ξ e le η rispettivamente.

Le equazioni (4) esprimono la composizione di 3 moti :

- componente secolare dovuta al moto proprio del **Centro di Massa**
- componente quadratica dovuta allo spostamento associato alla **Parallasse Annuale**
- componente quadratica del moto orbitale attorno al **Centro di Massa** della componente **A**

Le equazioni (4) possono essere usate per meglio approssimare le osservazioni astrometriche della componente principale attorno a **G** per un tempo sufficientemente lungo. Infatti in queste equazioni le $\xi_A(t)$, $\eta_A(t)$, $\rho(t)$ e $\theta(t)$ sono quantità misurate mentre (ξ_{0A}, η_{0A}) , (μ_ξ, μ_η) , π e (M_B/M_{TOT}) sono le incognite da stimare, per esempio con il metodo dei minimi quadrati. Ecco quindi che il monitoraggio dell'orbita assoluta (relativa al **C.d.M.**) della componente primaria di un sistema binario visuale rispetto alle **Stelle** di sfondo assunte a distanza infinita permette di stimare contemporaneamente sia le proprietà del sistema, cioè il **Moto Proprio** e la **Parallasse del Centro di Massa**, che il rapporto $f_B(M) = (M_B/M_{TOT})$.

Analoghe considerazioni sulla componente secondaria permettono di stimare $f_A(M) = (M_A/M_{TOT})$ oltre ad un'altra stima di (μ_ξ, μ_η) e π del **Centro di Massa**, da cui, combinando le due stime si ottiene il rapporto delle masse tra le componenti **A** e **B**.

D'altra parte per il sistema visuale la somma delle masse $M_{TOT} = M_A + M_B$ è nota dall'analisi dell'orbita relativa utilizzando la parallasse π , ottenuta dalle risoluzioni delle equazioni (4), inserita a sua volta nella equazione (1) (terza legge di Keplero).

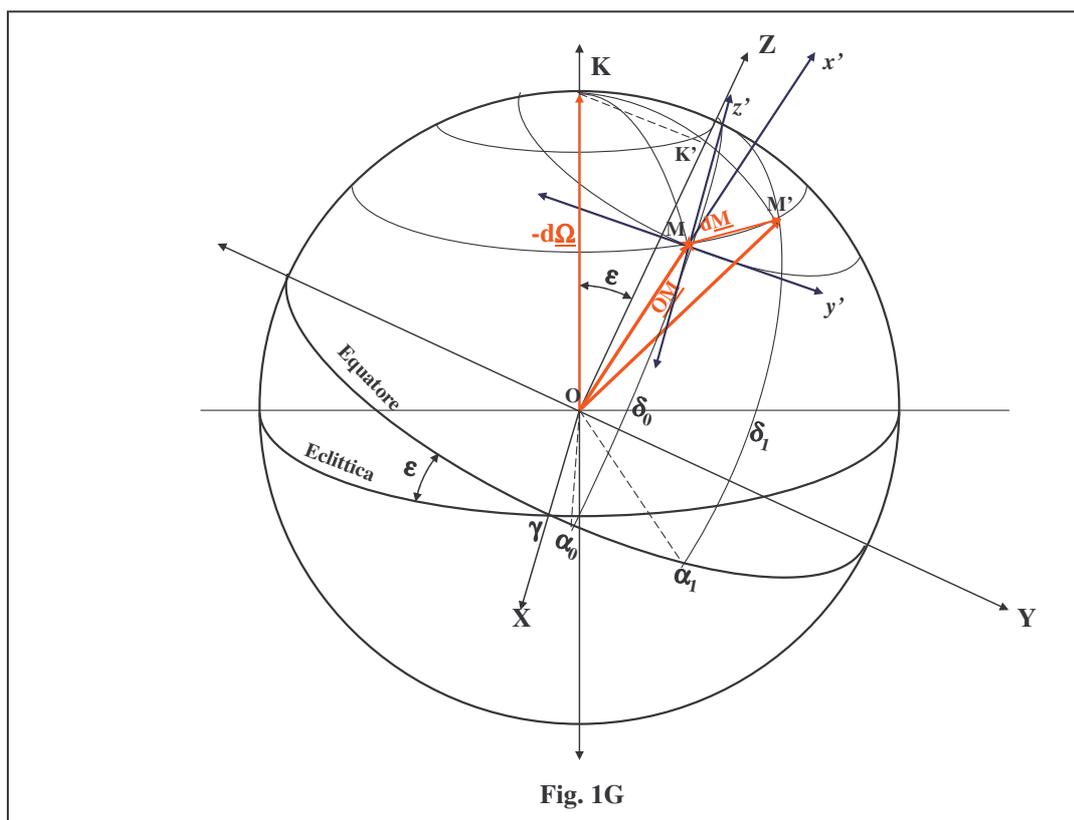
Pertanto noti la somma e il rapporto delle masse della binaria sono pure note le masse individuali cercate M_A e M_B che risultano quindi determinate in modo assoluto.

APPENDICE G

Descrizione vettoriale dello spostamento apparente delle Stelle dovuto al fenomeno della Precessione degli Equinozi con correzioni differenziali al primo ordine

Immaginiamo di osservare una stella \mathbf{M} all'istante \mathbf{t}_0 (vedi Figura 1G) e supponiamo che un istante infinitesimo dopo \mathbf{t}_1 , la stella per effetto del fenomeno della **Precessione** si sia spostata della quantità (vettore) \mathbf{dM} sul piano tangente alla sfera in \mathbf{M} con direzione parallela al piano dell'Eclittica e verso antiorario (visto dal polo dell'Eclittica). In questo contesto si è fatta l'assunzione che nell'intervallo $\mathbf{t}_1-\mathbf{t}_0$ l'Eclittica non si sia mossa rispetto alle stelle "fisse" e che il sistema di assi equatoriale abbia subito una rotazione attorno al Polo dell'Eclittica $\mathbf{d\Omega}$. Per comodità grafiche abbiamo mantenuto il punto γ fisso spostando la stella con un vettore \mathbf{dM} parallelo all'Eclittica in senso antiorario. Per una tale rotazione infinitesima, le nuove coordinate del vettore $\mathbf{OM'}$ si possono calcolare utilizzando la seguente espressione vettoriale:

$$\mathbf{dM} = \begin{vmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{vmatrix} = -\mathbf{d\Omega} \wedge \mathbf{OM}$$



Se assumiamo che il vettore $\mathbf{d\Omega}$ abbia come modulo:

$$|d\underline{\Omega}| = p (t_1 - t_0)$$

dove $p=50'',28$ rappresenta la costante di **Precessione**, $\epsilon=23^\circ,44$ l'obliquità dell'Eclittica e $(t_1 - t_0)$ la differenza di tempo infinitesima, le sue componenti nel sistema equatoriale saranno, proiettando l'asse **OK** sull'asse **OZ** e sull'asse **OY** (vedi **Figura 1G**):

$$-d\underline{\Omega} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{KK}' & \\ \mathbf{OK}' & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \\ -p \cdot (t_1 - t_0) \cdot \sin \epsilon & \\ p \cdot (t_1 - t_0) \cdot \cos \epsilon & \end{vmatrix}$$

ponendo secondo la notazione usualmente utilizzata:

$$\mathbf{m} = p \cdot \cos \epsilon$$

$$\mathbf{n} = p \cdot \sin \epsilon$$

il vettore $-d\underline{\Omega}$ si può scrivere:

$$-d\underline{\Omega} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{KK}' & \\ \mathbf{OK}' & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \\ -\mathbf{n} \cdot (t_1 - t_0) & \\ \mathbf{m} \cdot (t_1 - t_0) & \end{vmatrix}$$

mentre le componenti del vettore **OM** nel sistema equatoriale si possono scrivere:

$$\underline{\mathbf{OM}} = \begin{vmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha_0 \cdot \cos \delta_0 \\ \sin \alpha_0 \cdot \cos \delta_0 \\ \sin \delta_0 \end{vmatrix}$$

Pertanto il prodotto vettoriale

$$d\underline{\mathbf{M}} = \begin{vmatrix} d\mathbf{X} \\ d\mathbf{Y} \\ d\mathbf{Z} \end{vmatrix} = -d\underline{\Omega} \wedge \underline{\mathbf{OM}}$$

può essere messo in forma matriciale

$$d\underline{\mathbf{M}} = \begin{vmatrix} d\mathbf{X} & & & d\mathbf{Y} & & & d\mathbf{Z} \\ \mathbf{0} & & & -\mathbf{n} \cdot (t_1 - t_0) & & & \mathbf{m} \cdot (t_1 - t_0) \\ \cos \alpha_0 \cos \delta_0 & & & \sin \alpha_0 \cos \delta_0 & & & \sin \delta_0 \end{vmatrix}$$

quindi le componenti di **dM** nel sistema equatoriale diventano:

$$dX = -n(t_1 - t_0) \sin \delta_0 - m(t_1 - t_0) \sin \alpha_0 \cos \delta_0$$

$$dY = m(t_1 - t_0) \cos \alpha_0 \cos \delta_0$$

$$dZ = n(t_1 - t_0) \cos \alpha_0 \cos \delta_0$$

invece le componenti di **dM** nel sistema locale con origine in **M**, il cui asse **x** è lungo il vettore **OM**, l'asse **y** parallelo all'equatore celeste e l'asse **z'** parallelo al meridiano hanno i seguenti valori:

$$\underline{dM} = \begin{vmatrix} dX' \\ dY' \\ dZ' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d\mathbf{r} \\ \cos \delta_0 \cdot d\alpha \\ d\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \cos \delta_0 \cdot d\alpha \\ d\delta \end{vmatrix}$$

il valore di $d\mathbf{r}$ è nullo in quanto il moto di \mathbf{M} avviene nel piano $y'z'$ di **Figura 1G**, per cui la componente su x' non esiste.

Avendo ora a disposizione il vettore \underline{dM} nel sistema equatoriale e in quello locale, il passaggio da un sistema all'altro si fa tramite le matrici di rotazione $\mathbf{R}_z(\alpha)$ e $\mathbf{R}_y(-\delta)$ già viste nell'**Appendice E**:

$$\begin{vmatrix} dX' \\ dY' \\ dZ' \end{vmatrix} = \mathbf{R}_z(\alpha) \cdot \mathbf{R}_y(-\delta) \cdot \begin{vmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} dX' \\ dY' \\ dZ' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \delta_0 & 0 & \sin \delta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \delta_0 & 0 & \cos \delta_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \alpha_0 & \sin \alpha_0 & 0 \\ -\sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \delta_0 \cos \alpha_0 & \cos \delta_0 \sin \alpha_0 & \sin \delta_0 \\ -\sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & 0 \\ -\sin \delta_0 \cos \alpha_0 & -\sin \delta_0 \sin \alpha_0 & \cos \delta_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{vmatrix}$$

eseguendo il prodotto matriciale ed eguagliando con le componenti di \underline{dM} nel sistema locale si ha:

$$dM = \begin{vmatrix} dX \cos \alpha_0 \cos \delta_0 + dY \sin \alpha_0 \cos \delta_0 + dZ \sin \delta_0 \\ -dX \sin \alpha_0 + dY \cos \alpha_0 + 0 \\ -dX \sin \delta_0 \cos \alpha_0 - dY \sin \delta_0 \sin \alpha_0 + dZ \cos \delta_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \cos \delta_0 \cdot d\alpha \\ d\delta \end{vmatrix}$$

sostituendo i valori di dX , dY , dZ , trovati poco fa, si ha:

$$dM = \begin{vmatrix} [-n(t_1 - t_0) \sin \delta_0 - m(t_1 - t_0) \sin \alpha_0 \cos \delta_0] \cos \alpha_0 \cos \delta_0 + [m(t_1 - t_0) \cos \alpha_0 \cos \delta_0] \sin \alpha_0 \cos \delta_0 + [n(t_1 - t_0) \cos \alpha_0 \cos \delta_0] \sin \delta_0 \\ [n(t_1 - t_0) \sin \delta_0 + m(t_1 - t_0) \sin \alpha_0 \cos \delta_0] \sin \alpha_0 + [m(t_1 - t_0) \cos \alpha_0 \cos \delta_0] \cos \alpha_0 + 0 \\ [n(t_1 - t_0) \sin \delta_0 + m(t_1 - t_0) \sin \alpha_0 \cos \delta_0] \sin \delta_0 \cos \alpha_0 - [m(t_1 - t_0) \cos \alpha_0 \cos \delta_0] \sin \alpha_0 \sin \delta_0 + [n(t_1 - t_0) \cos \alpha_0 \cos \delta_0] \cos \delta_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \cos \delta_0 \cdot d\alpha \\ d\delta \end{vmatrix}$$

sviluppando e semplificando solo le ultime due componenti si ha

$$d\alpha = \alpha_1 - \alpha_0 = (m + n \cdot \sin \alpha_0 \cdot \tan \delta_0) \cdot (t_1 - t_0)$$

$$d\delta = \delta_1 - \delta_0 = n \cdot \cos \alpha_0 \cdot (t_1 - t_0)$$

Queste formule sono uguali a quelle che sono state ottenute nel presente Corso riguardo al calcolo non rigoroso dello spostamento delle coordinate equatoriali di una stella dovuto al fenomeno della **Precessione** degli equinozi

Di conseguenza essendo θ un angolo piccolo anche l'angolo $\angle P_0 P_0 X = \zeta_A$ sarà piccolo mentre l'angolo $\angle P_0 P_0 X$ sarà uguale ad α_0 e $\angle P_0 X$ uguale a $90^\circ - \delta_0$.

Viceversa l'angolo $\angle P P_0$ essendo vicino all'angolo piatto sarà uguale a $180^\circ + z_A$, mentre l'angolo $\angle P_0 P X = 180^\circ - (\alpha - z_A)$ e $\angle P X = 90^\circ - \delta$.

Applicando le formule di trigonometria sferica al triangolo $P P_0 X$ (rispettivamente la III la II e la I) si hanno le coordinate equatoriali all'istante t in funzione di quelle riferite a t_0 per mezzo della conoscenza dei 3 angoli precessionali θ, z_A, ζ_A :

$$\cos \delta \cos(\alpha - z_A) = \cos \theta \cos \delta_0 \cos(\alpha_0 + \zeta_A) - \sin \theta \sin \delta_0$$

$$\cos \delta \sin(\alpha - z_A) = \cos \delta_0 \sin(\alpha_0 + \zeta_A)$$

$$\sin \delta = \sin \theta \cos \delta_0 \cos(\alpha_0 + \zeta_A) + \cos \theta \sin \delta_0$$

Il passaggio inverso dall'istante t_0 all'istante t_1 comporta un differente utilizzo dello stesso set di formule trigonometriche che danno:

$$\cos \delta_0 \cos(\alpha_0 + \zeta_A) = \cos \theta \cos \delta \cos(\alpha - z_A) - \sin \theta \sin \delta$$

$$\cos \delta_0 \sin(\alpha_0 + \zeta_A) = \cos \delta \sin(\alpha - z_A)$$

$$\sin \delta_0 = -\sin \theta \cos \delta \cos(\alpha - z_A) + \cos \theta \sin \delta$$

Le formule viste poc'anzi sono esatte, ma per poterle usare occorre che siano noti i valori dei 3 angoli precessionali θ, z_A, ζ_A che devono essere derivati dalla teoria precessionale. Questi sono calcolati, in pratica, come serie di potenze nell'intervallo $(t-t_0)$ includendo termini fino al terzo ordine.

I coefficienti nelle serie di potenze dipendono leggermente dall'epoca iniziale che è stata scelta.

Se questa è riferita al **J2000.0** le costanti precessionali assumono la seguente forma già viste durante il Corso

$$\zeta_A = 0^\circ,6406161 \cdot T + 0^\circ,0000839 \cdot T^2 + 0^\circ,0000050 \cdot T^3$$

$$z_A = 0^\circ,6406161 \cdot T + 0^\circ,0003041 \cdot T^2 + 0^\circ,0000051 \cdot T^3$$

$$\theta_A = 0^\circ,5567530 \cdot T + 0^\circ,0001185 \cdot T^2 + 0^\circ,0000116 \cdot T^3$$

dove T rappresenta l'intervallo di tempo $(t-t_0)$ espresso in secoli Giuliani di **36525** giorni.

Le formule fin qui esposte sono rigorose ma poco pratiche per il calcolo. Tuttavia queste possono essere migliorate con la notazione vettoriale. Pertanto la trasformazione da un equatore e equinozio di un'epoca a quella di un'altra può essere espressa come un'operazione matriciale su di un vettore posizione della stella.

Sia \mathbf{s}_0 un vettore unitario che specifica la posizione di una stella riferita a un sistema di assi equatoriali determinati dall'equatore ed equinozio di una epoca standard t_0 . Possiamo esprimere questo vettore con il seguente formalismo vettoriale riportato più volte in altre **Appendici** del presente corso:

$$\mathbf{s}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \delta_0 \end{pmatrix}$$

Allo stesso modo sia \mathbf{s} il vettore unitario che definisce il sistema equatoriale all'epoca t , quindi:

$$\underline{s} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{vmatrix}$$

Ora le equazioni di trasformazione viste poco fa possono essere espresse in termini delle componenti dei due vettori \mathbf{S} e \mathbf{S}_0

La componente $\mathbf{z} = \sin \delta$ è la più semplice da trasformare:

$$z = \sin \delta = \sin \theta \cos \delta_0 \cos(\alpha_0 + \zeta_A) + \cos \theta \sin \delta_0 = \sin \theta \cos \delta_0 (\cos \alpha_0 \cos \zeta_A - \sin \alpha_0 \sin \zeta_A) + \cos \theta \sin \delta_0$$

sviluppando e sostituendo i valori di $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$ si ha:

$$z = \sin \delta = \sin \theta \cos \zeta_A \cdot x_0 - \sin \theta \sin \zeta_A \cdot y_0 + \cos \theta \cdot z_0$$

per il calcolo delle \mathbf{x} e \mathbf{y} si procede dapprima a metterle in funzione di α, δ, z_A e successivamente in funzione dei 3 angoli precessionali e delle componenti $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$.

Il primo passo è il seguente:

$$x = \cos \delta \cos \alpha = \cos \delta \cos[(\alpha - z_A) + z_A] = \cos \delta \cos(\alpha - z_A) \cos z_A - \cos \delta \sin(\alpha - z_A) \sin z_A$$

$$y = \cos \delta \sin \alpha = \cos \delta \sin[(\alpha - z_A) + z_A] = \cos \delta \cos(\alpha - z_A) \sin z_A + \cos \delta \sin(\alpha - z_A) \cos z_A$$

prendendo i secondi membri delle prime due equazioni di trasformazione e sostituendoli nei secondi membri delle equazioni appena ricavate si ha:

$$x = \cos \delta \cos(\alpha - z_A) \cos z_A - \cos \delta \sin(\alpha - z_A) \sin z_A = [\cos \theta \cos \delta_0 \cos(\alpha_0 + \zeta_A) - \sin \theta \sin \delta_0] \cos z_A - [\cos \delta_0 \sin(\alpha_0 + \zeta_A)] \sin z_A$$

$$y = \cos \delta \cos(\alpha - z_A) \sin z_A + \cos \delta \sin(\alpha - z_A) \cos z_A = [\cos \theta \cos \delta_0 \cos(\alpha_0 + \zeta_A) - \sin \theta \sin \delta_0] \sin z_A - [\cos \delta_0 \sin(\alpha_0 + \zeta_A)] \cos z_A$$

sviluppando con le formule di addizione dei seni e coseni e raggruppando gli elementi comuni a $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$ si ha infine:

$$x = (\cos \zeta_A \cos z_A \cos \theta - \sin \zeta_A \sin z_A) \cdot x_0 - (\cos \zeta_A \sin z_A + \sin \zeta_A \cos z_A \cos \theta) \cdot y_0 - \cos z_A \sin \theta \cdot z_0$$

$$y = (\sin \zeta_A \cos z_A + \cos \zeta_A \sin z_A \cos \theta) \cdot x_0 + (\cos \zeta_A \cos z_A - \sin \zeta_A \sin z_A \cos \theta) \cdot y_0 - \sin z_A \sin \theta \cdot z_0$$

I coefficienti di $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$ nelle equazioni precedenti rappresentano i coseni direttori dei nuovi assi rispetto ai vecchi e questi possono essere rappresentati in una forma matriciale molto semplice ai fini del calcolo..

Chiamando le coordinate $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ con $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ e $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ e $(\mathbf{x}_0 1, \mathbf{x}_0 2, \mathbf{x}_0 3)$ possiamo scrivere

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{P}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{0j}$$

pertanto le \mathbf{P}_{ij} altro non sono che gli elementi della matrice dei coefficienti delle equazioni in $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ viste sopra

$$\mathbf{P}_{11} = (\cos \zeta_A \cos z_A \cos \theta - \sin \zeta_A \sin z_A)$$

$$\mathbf{P}_{12} = -(\cos \zeta_A \sin z_A + \sin \zeta_A \cos z_A \cos \theta)$$

$$\mathbf{P}_{13} = -\cos z_A \sin \theta$$

$$\mathbf{P}_{21} = (\sin \zeta_A \cos z_A + \cos \zeta_A \sin z_A \cos \theta) \cdot$$

$$\mathbf{P}_{22} = (\cos \zeta_A \cos z_A - \sin \zeta_A \sin z_A \cos \theta)$$

$$\mathbf{P}_{23} = -\sin z_A \sin \theta \cdot$$

$$\mathbf{P}_{31} = \sin \theta \cos \zeta_A$$

$$\mathbf{P}_{32} = -\sin \theta \sin \zeta_A \cdot$$

$$\mathbf{P}_{33} = \cos \theta$$

Possiamo quindi scrivere l'equazione di trasformazione in notazione matriciale come:

$$\underline{\mathbf{s}} = \mathbf{P} \cdot \underline{\mathbf{s}}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} \end{vmatrix} \cdot \underline{\mathbf{s}}_0$$

La matrice \mathbf{P} viene detta matrice di rotazione.

Guardando la **Figura 1H** possiamo vedere che le coordinate di trasformazione possono essere risolte in un prodotto di 3 rotazioni. Una prima rotazione in senso orario di un angolo $-\zeta_A$ attorno all'asse \mathbf{P}_0 , quindi una seconda rotazione antioraria di un angolo θ attorno all'asse \mathbf{V}_0 ed infine una terza rotazione di un angolo $-z_A$ in senso orario attorno all'asse finale \mathbf{P} .

Poichè i 3 angoli precessionali sono piccoli molti elementi della matrice di rotazione sono anch'essi piccoli fatta eccezione per i 3 elementi diagonali della matrice che sono prossimi all'unità.

Come c'è da aspettarsi se l'intervallo $(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)$ tende a zero la matrice di rotazione tende a diventare una matrice unità.

La trasformazione inversa dall'epoca \mathbf{t} a \mathbf{t}_0 si può scrivere in forma matriciale:

$$\underline{\mathbf{s}}_0 = \mathbf{P}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{s}}$$

In questo caso non è necessario invertire la matrice di partenza in quanto la sua inversa, ottenuta rimpiazzando i 3 angoli ζ_A, z_A, θ con $-\zeta_A, -z_A, -\theta$ coincide con la sua trasposta per cui la trasformazione inversa si può scrivere:

$$\underline{\mathbf{s}}_0 = \mathbf{P}^T \cdot \underline{\mathbf{s}}$$

Questa trattazione è rigorosa per quanto concerne il calcolo della **Precessione Generale** ma non contiene il fenomeno della **Nutazione** che insieme alla precessione altera la posizione delle coordinate apparenti delle stelle.

In questo caso si ricorre all'uso degli elementi tabulati giornalmente sull'Astronomical Almanac che forniscono valori di $\mathbf{P}_{i,j}$ leggermente diversi da quelli che si possono ottenere con i 3 angoli riportati precedentemente.

Bibliografia

- C.W.Allen 1973 : *Astrophysical Quantities*, 3-rd ed. London :Athlone Press
- A. Berger, M.F.,Loutre 1990, *Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique*, 6-ème série, tome 1,Vol.1-3
- M. Bertolini 1997,"Corso di Aggiornamento in Navigazione Moderna", *Rapporto Tecnico*
- J. Binney and M. Merrifield,1998; *Galactic Astronomy*, Princeton University press
- N. Capitaine 2000,ASP Conference Series Vol. 208
- G. Cecchini, 1969, "Il Cielo", ed. UTET, Vol. I, pp 241-274
- A. Danjon, 1952: ``Astronomie Generale'', Ed. J. and R. Sennac
- Explanatory Supplement to The Astronomical Ephemeris*, 1961
- Explanatory Supplement to The Astronomical Ephemeris*, 1992
- L. Fairhead and P. Bretagnon, 1990, *Atron. And Astrophys.*, 29, 40-247
- R. M. Green, 1988:``Spherical Astronomy'', Ed. Cambridge University Press
- J.C. Hafele and R.E. Keating:,1972, *Science*, 177, 166
- A.W. Irwin and T. Fukushima , 1999, *Astron. and Astrophys.*, 348, 642-652
- J. Laskar , 1986, *Astron. and Astrophys.*, 157,59
- P. Mc Clure, 1973,*Diurnal Polar Motion*, NASA Report TM-X-70470
- F.Mignard 1981, *La Recherche*, Vol. 12 N.119, 136-146
- D. Mihalas and J. Binney, 1981:"Galactic Astronomy :Structures and Kinematics", Second, edition, W.H. Freeman and Company
- I. Mueller,1969:``Spherical and Practical Astronomy'', Ed. Federick Ungar
- R. A. Muller and G. J.MacDonald, 1997, *Science* vol 277, pp 215-218
- S. Newcomb, 1906:``Spherical Astronomy'', Ed. The Macmillan Company Publishing Co.
- R.T. Quinn, S. Tremaine, M. Duncan , 1991, *Astron. Journ.*, Vol. 10, n. 6
- W. Rindler, 1979, "Essential Relativity", Ed. Springer-Verlag ,New York
- P.K. Seidelmann and T.Fukushima, 1992, *Atron. And Astrophys.* 265, 833-838
- W.M. Smart, 1931:``Text-Book on Spherical Astronomy'', Ed. Cambridge University Press
- R..J. Trumpler and H.F.Weaver,1962,"Statistical Astronomy", Ed. Dover publ. Inc.

Ringraziamenti

Gli autori del presente corso vogliono esprimere il proprio ringraziamento ad alcuni colleghi dell'Osservatorio Astronomico di Torino, in particolare ai **Dott. A. Spagna, R. Drimmel , R. Smart, e A. Vecchiato**, che hanno contribuito alla scelta degli argomenti trattati fornendo nel contempo la consulenza su alcuni di questi

INDICE

La Sfera Celeste.....	2
Generalità.....	2
Trigonometria Sferica	3
Prima Formula Fondamentale di Trigonometria sferica (Formula dei Coseni).....	4
Seconda Formula Fondamentale di Trigonometria Sferica (Formula dei Seni).....	6
Terza Formula Fondamentale di Trigonometria sferica	7
Area di un Triangolo Sferico	9
Sistemi di Coordinate Celesti.....	13
Il Sistema Altazimutale o Primo Sistema	13
Il Sistema Orario o Secondo Sistema.....	16
Il Terzo Sistema o Sistema Equatoriale	20
Il Quarto Sistema o Sistema Eclitticale	21
Il Quinto Sistema o Sistema Galattico	22
Trasformazioni di coordinate dal I al II sistema e dal III al IV e viceversa	23
La Misura del Tempo e i Moti della Terra	25
Cenni storici sulle Unità di Tempo	25
Giorno Sidereo o Rotazionale e variazioni del moto di rotazione terrestre	26
Giorno Siderale	30
Precessione Generale	34
Nutazione	38
Polodia	45
Giorno Solare	49
Ore di Insolazione, Crepuscolo Civile, Nautico e Astronomico.....	52
Giorno Astronomico e Giorno Civile	54
Fusi Orari , Tempo di Zona.....	55
Tempo Legale	57
Anno Siderale, Anno Tropico, Anno Anomalistico.....	59
Calendario Giuliano	63
Calendario Gregoriano.....	64
Data Giuliana Convenzionale e Modificata	66
Tempo Universale	67
Tempo delle Effemeridi	71
Tempo Atomico Internazionale	73
Cenni di Relatività Ristretta e Generale.....	75
Scale di Tempo Moderne.....	89
Il Tempo Dinamico Terrestre (TDT)	89
Tempo Dinamico Baricentrico (TDB).....	90
Tempo Coordinato Baricentrico (TCB)	93
Tempo Coordinato Geocentrico (TCG).....	93
Tempo Universale Coordinato (UTC)	94
GPS Time.....	98
Fenomeni che alterano le coordinate apparenti degli Astri.....	99
Introduzione	99
Rifrazione Astronomica	99
Parallasse Trigonometrica Annua	101
Aberrazione Astronomica	110
Moto Proprio.....	111
Velocità Spaziale delle Stelle.....	113
Moto Solare e Parallasse Secolare	115

Parallassi Statistiche o Medie	118
Stelle Doppie Visuali	120
Parallasse Dinamica	123
Cenni sulle Binarie Spettroscopiche ad Eclisse ed Astrometriche	125
Binarie Spettroscopiche	125
Binarie ad Eclisse.....	126
Binarie Astrometriche	127
Struttura e Cinematica della nostra Galassia	129
Sguardo Storico.....	129
Componenti Principali della Galassia.....	133
Disco Giovane.....	136
Disco Intermedio.....	136
Disco Vecchio	136
Disco Spesso	137
Alone.....	137
Corona.....	138
Bulge	138
Nucleo	138
Local Standard of Rest (LSR).....	139
Coordinate Galattocentriche	140
Componenti del Moto Solare rispetto al LSR.....	143
Distribuzione della densità stellare	149
Rotazione Galattica.....	153
Il Mezzo Interstellare	156
Il Gas nel Mezzo Interstellare	156
Le Polveri nel Mezzo Interstellare	157
Conteggi Stellari	163
Funzione di Luminosità	167
Funzione di Luminosità Iniziale e Funzione di Massa Iniziale	175
Malmquist Bias	177
Cinematica della Rotazione Galattica.....	181
Costanti di Oort.....	187
Determinazione sperimentale delle Costanti di Oort	193
APPENDICE A	200
L'Eccesso Sferico delle Superfici su di una Sfera	200
APPENDICE B.....	203
Trasformazione vettoriale di un sistema di coordinate astronomiche ad un altro	203
APPENDICE C	210
Passaggio da Coordinate di Catalogo a Coordinate di Puntamento di un telescopio	210
EQUINOZIO MEDIO, PRECESSIONE E NUTAZIONE	210
COORDINATE MEDIE BARICENTRICHE ED ELIOCENTRICHE	211
COORDINATE MEDIE ALLA DATA OSSERVAZIONE.....	211
COORDINATE VERE ELIOCENTRICHE ALLA DATA DI OSSERVAZIONE	213
COORDINATE APPARENTI ALLA DATA DI OSSERVAZIONE	215
COORDINATE TOPOCENTRICHE ALLA DATA DI OSSERVAZIONE	217
COORDINATE DI PUNTAMENTO ALLA DATA DI OSSERVAZIONE.....	219
APPENDICE D	222
Descrizione Vettoriale dello Spostamento Apparente delle Stelle Dovuto alla Parallasse (Spostamento Parallattico)	222
APPENDICE E.....	231

Trattamento vettoriale rigoroso del calcolo delle coordinate equatoriali delle stelle tramite l'utilizzo dei loro Moti Propri	231
APPENDICE F	238
La Massa delle Stelle Binarie Visuali.....	238
APPENDICE G	243
Descrizione vettoriale dello spostamento apparente delle Stelle dovuto al fenomeno della Precessione degli Equinozi con correzioni differenziali al primo ordine	243
APPENDICE H	246
Descrizione vettoriale rigorosa dello spostamento apparente delle Stelle dovuto al fenomeno della Precessione degli Equinozi con correzioni differenziali al secondo ordine	246
Bibliografia	250
Ringraziamenti	250