

TECHNICAL REPORT n. 77

**PROPRIETÀ CROMATICHE DEL BARICENTRO PER  
UNA PUPILLA DI FORMA GENERICA**

Daniele Gardiol

Osservatorio Astronomico di Torino

## Proprietà cromatiche del baricentro per una pupilla di forma generica

Daniele Gardiol, INAF – Osservatorio Astronomico di Torino  
Nota tecnica, 6 dicembre 2005

### Abstract

Si ricava una formula analitica per il valore del baricentro calcolato per un sistema ottico con una pupilla di forma qualunque. Il risultato mostra che tale valore non dipende dalla lunghezza d'onda della radiazione monocromatica, e dipende dalla forma del fronte d'onda sul bordo della pupilla. Rimangono aperte due questioni importanti dal punto di vista formale, riportate in appendice.

### 1. Definizioni

Nell'approssimazione di Fraunhofer la PSF monocromatica può essere scritta come

$$P_\lambda(\xi, \eta) = \frac{1}{\lambda^2 S} \left| \int \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) \exp[ik(x\xi + y\eta)] dx dy \right|^2 \quad [1]$$

dove  $k=2\pi/\lambda$ ,  $S$  è la superficie della pupilla  $\wp \subset \mathfrak{R}^2$  e  $A$  è la funzione (complessa) di pupilla,

$$A(x, y) = \begin{cases} \exp[ikW(x, y)] & \text{per } (x, y) \in \wp \subset \mathfrak{R}^2 \\ 0 & \text{per } (x, y) \notin \wp \subset \mathfrak{R}^2 \end{cases} \quad [2]$$

La normalizzazione è tale per cui

$$\iint_{\wp} P_\lambda(\xi, \eta) d\xi d\eta = 1 \quad [3]$$

Ora, poiché per un numero complesso  $z \in C$  vale la relazione  $|z|^2 = z^* z$  è possibile riscrivere la [1] come

$$P_\lambda(\xi, \eta) = \frac{1}{\lambda^2 S} \int \int_{-\infty}^{\infty} A^*(x', y') \exp[-ik(x'\xi + y'\eta)] dx' dy' \times \\ \times \int \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) \exp[ik(x\xi + y\eta)] dx dy \quad [4]$$

La LSF (monocromatica) si ottiene integrando in una delle direzioni (per Gaia sarà quella denominata across-scan, poniamo  $\eta$ ), ed il baricentro può perciò essere scritto come

$$\xi_0(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_\lambda(\xi, \eta) \xi d\xi d\eta \quad [5]$$

integrando al solito sul piano immagine considerato infinito. Usando la [4], la [5] diventa un integrale sestuplo

$$\xi_0(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 S} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} A^*(x', y') \exp[-ik(x'\xi + y'\eta)] dx' dy' \right\} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) \exp[ik(x\xi + y\eta)] dx dy \xi d\xi d\eta \quad [6]$$

## 2. Calcolo esplicito dell'integrale [6]

Per il calcolo esplicito si può procedere come segue. Riordinando i termini ed effettuando per prima l'integrazione sulle coordinate del piano immagine si ottiene [vedi appendice per l'uso della delta di Dirac]

$$\begin{aligned} \xi_0(\lambda) &= \frac{1}{\lambda^2 S} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A^*(x', y') dx' dy' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) dx dy \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-ik(x'\xi + y'\eta)] \exp[ik(x\xi + y\eta)] \xi d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{\lambda^2 S} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A^*(x', y') dx' dy' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) dx dy \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik\eta(y - y')] d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik\xi(x - x')] \xi d\xi \\ &= \frac{1}{\lambda^2 S} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A^*(x', y') dx' dy' \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) dx dy \right\} \times 2\pi \delta[k(y - y')] \times \{-2\pi i \delta'[k(x - x')]\} = \\ &= -\frac{4\pi^2 i}{\lambda^2 S} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A^*(x', y') dx' dy' \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) dx dy \right\} \times \frac{1}{k} \delta(y - y') \times \frac{1}{k^2} \delta'(x - x') = \\ &= -\frac{i}{kS} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A^*(x', y') dx' dy' \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) dx dy \right\} \delta(y - y') \delta'(x - x') = \end{aligned}$$

La presenza delle delta di Dirac permette di ridurre l'integrale quadruplo ad un integrale doppio:

$$\begin{aligned} \xi_0(\lambda) &= -\frac{i}{kS} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A^*(x', y') dx' dy' \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) dx \delta'(x - x') = \\ &= -\frac{i}{kS} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A^*(x', y') dx' dy' \left[ -\frac{\partial A}{\partial x}(x', y') \right] \end{aligned}$$

Poiché  $A(x, y)$  è nulla al di fuori della pupilla, lo è anche la sua derivata parziale rispetto a  $x$ , per cui

$$\xi_0(\lambda) = \frac{i}{kS} \iint_{\phi} A^*(x, y) \left[ \frac{\partial A}{\partial x}(x, y) \right] dx dy =$$

$$= \frac{i}{kS} \iint_{\varphi} \exp[-ikW(x, y)] \times ik \frac{\partial W}{\partial x}(x, y) \exp[ikW(x, y)] dx dy$$

$$\xi_0(\lambda) = -\frac{1}{S} \iint_{\varphi} \frac{\partial W}{\partial x}(x, y) dx dy \quad [7]$$

Nella [7] l'integrale dipende dalla forma della pupilla, **ma è indipendente dalla lunghezza d'onda della radiazione monocromatica.**

Si noti che, per il teorema di Green, la [7] si può scrivere come:

$$\xi_0(\lambda) = -\frac{1}{S} \iint_{\varphi} \frac{\partial W}{\partial x}(x, y) dx dy = -\frac{1}{S} \oint_{\gamma} W(x, y) dy \quad [8]$$

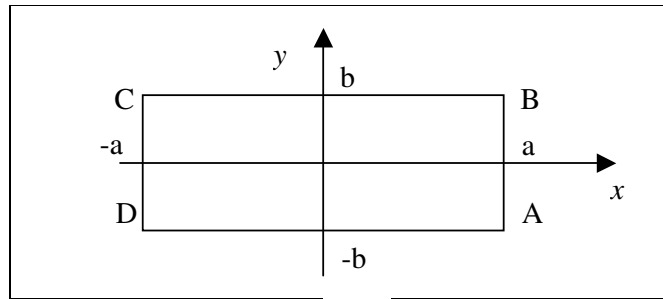
dove  $\gamma$  è il bordo della pupilla.

### 3. Calcoli espliciti per le forme di pupilla più semplici

#### 3.1 Pupilla rettangolare

Nel caso di pupilla rettangolare, la [8] si può integrare direttamente. Assumendo di utilizzare un sistema di coordinate con origine nel centro della pupilla e orientato secondo la figura, si ha

$$\mathcal{P}: \begin{cases} x \in [-a, a] \\ y \in [-b, b] \end{cases}$$



L'integrale di cammino si scompone in quattro integrali lungo i quattro lati del rettangolo:

$$\xi_0 = -\frac{1}{S} \oint_{\gamma} W(x, y) dy = -\frac{1}{S} \left( \int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A \right) W(x, y) dy$$

La soluzione di ciascuno dei quattro elementi è data da

$$\begin{aligned} \int_A^B W(x, y) dy &= \int_{-b}^b W(a, y) dy \\ \int_B^C W(x, y) dy &= \int_{-b}^b W(-a, y) dy = -\int_{-b}^b W(-a, y) dy \\ \int_C^D W(x, y) dy &= \int_b^{-b} W(x, y) dy = 0 \\ \int_D^A W(x, y) dy &= \int_b^{-b} W(x, y) dy = 0 \end{aligned}$$

per cui il risultato finale fornisce

$$\xi_0 = -\frac{1}{4ab} \int_{-b}^b [W(a, y) - W(-a, y)] dy = -\frac{1}{ab} \int_0^b W_{-,+}(a, y) dy$$

risultato analogo a quello trovato da Lindegren (*A theoretical investigation of chromaticity*, GAIA-CA-TN-LU-LL-064\_1 del 15/11/2005, Eq. 18). Si noti che solo le parti del fronte d'onda antisimmetriche rispetto alla coordinata  $x$  e simmetriche rispetto alla coordinata  $y$  danno contributo non nullo al valore del baricentro (come deve essere).

Su una pupilla rettangolare  $W$  può essere utilmente descritto in termini di polinomi di Legendre, secondo il seguente sviluppo:

$$W(x, y) = \sum_{i,j} d_{ij} L_{ij}(x, y)$$

dove

$$L_{ij}(x, y) = L_i(x/a)L_j(y/b)$$

e  $L_k(z)$  è il polinomio di Legendre di ordine  $k$  per  $z \in [-1,1] \subset \mathfrak{R}$

Da quanto detto in precedenza, segue che solamente i termini dello sviluppo  $L_{ij}(x, y)$  tali per cui  $i$  è dispari e  $j$  è pari danno un contributo non nullo al baricentro. Nel seguito si calcolano esplicitamente i primi termini con contributo non nullo.

### 3.1.1 Termini del primo ordine

L'unico termine del primo ordine a contribuire è  $L_{10}$  (tilt direzione  $x$ )

$$W_{10}(x, y) = d_{10} L_{10}(x, y) = \frac{d_{10}}{a} x$$

$$\xi_0 = -\frac{1}{ab} \int_0^b W_{-,+}(a, y) dy = -\frac{d_{10}}{ab} \int_0^b dy = -\frac{d_{10}}{a}$$

che rappresenta proprio lo spostamento angolare che ci si aspetta per un dato tilt del fronte d'onda (per ottenere lo spostamento in unità di lunghezza bisogna moltiplicare per la focale).

### 3.1.2 Termini del terzo ordine

Ci sono due termini del terzo ordine che contribuiscono (coma):

$$\mathbf{L}_{30}: W_{30}(x, y) = d_{30} L_{30}(x, y) = \frac{d_{30}}{2} \left[ 5 \left( \frac{x}{a} \right)^3 - 3 \frac{x}{a} \right]$$

$$\xi_0 = -\frac{1}{ab} \int_0^b W_{-,+}(a, y) dy = -\frac{d_{30}}{2ab} \int_0^b (5 - 3) dy = -\frac{d_{30}}{a}$$

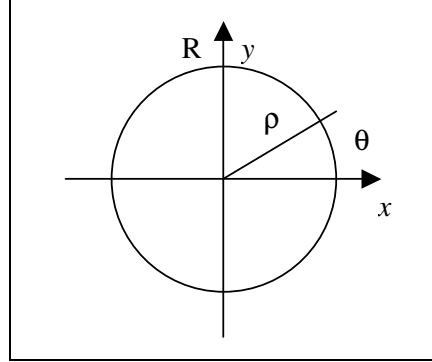
$$\mathbf{L}_{12}: W_{12}(x, y) = d_{12} L_{12}(x, y) = d_{12} \frac{x}{2a} \left( 3 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

$$\xi_0 = -\frac{1}{ab} \int_0^b W_{-,+}(a, y) dy = -\frac{d_{12}}{2ab} \int_0^b \frac{1}{2} (3t^2 - 1) dt = -\frac{d_{12}}{4a} (1 - 1) = 0$$

### 3.2 Pupilla circolare

Anche nel caso di pupilla circolare, la [8] si può integrare direttamente. Analogamente al caso precedente, è comodo utilizzare un sistema di coordinate con origine nel centro della pupilla:

$$\wp: \begin{cases} \rho \in [0,1] \\ \vartheta \in [0,2\pi] \end{cases} \quad \begin{cases} x = R\rho \cos \vartheta \\ y = R\rho \sin \vartheta \end{cases}$$



$$\xi_0 = -\frac{1}{S} \oint_{\gamma} W(x, y) dy = -\frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} W(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} d(\sin \vartheta)$$

Come è possibile vedere, tutti i termini del fronte d'onda proporzionali a  $\sin \theta$  (e perciò proporzionali a  $y$ ) danno contributo nullo al baricentro, per la periodicità del seno.

Nel caso di pupilla circolare, in generale  $W$  può essere descritto in termini di polinomi di Zernike, secondo il seguente sviluppo:

$$W(\rho, \vartheta) = \sum_{n,m} W_n^m(\rho, \vartheta) = c_0^0 + \sum_{n>0,m} c_n^m R_n^m(\rho) \cos m\vartheta + \sum_{n>0,m} c_n^{-m} R_n^m(\rho) \sin m\vartheta$$

dove  $n \in \mathbb{N}$  e  $m \leq n$  può assumere tutti e soli i valori per cui  $n + m$  è pari.

Ecco il calcolo del valore del baricentro per i primi polinomi di Zernike con contributo non nullo.

#### 3.2.1 Tilt: $(n,m) = (1,1)$

Solamente il tilt lungo  $x$  contribuisce.  $R_1^1(\rho) = \rho$  per cui

$$W_1^1(\rho, \vartheta) = c_1^1 \rho \cos \vartheta$$

$$\xi_0 = -\frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} W(1, \vartheta) d(\sin \vartheta) = -\frac{c_1^1}{\pi R} \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta d\vartheta = -\frac{c_1^1}{R}$$

che rappresenta di nuovo lo spostamento angolare che ci si aspetta per un dato tilt del fronte d'onda (ancora, per ottenere lo spostamento in unità di lunghezza bisogna moltiplicare per la focale).

#### 3.2.2 Coma: $(n,m) = (3,1)$

In questo caso  $R_3^1(\rho) = 3\rho^3 - 2\rho$ . Il risultato è analogo al precedente perché

$$W_3^1(\rho, \vartheta) = c_3^1(3\rho^3 - 2\rho)\cos \vartheta$$

$$\xi_0 = -\frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} W(1, \vartheta) d(\sin \vartheta) = -\frac{c_3^1}{\pi R} \int_0^{2\pi} (3-2)\cos^2 \vartheta d\vartheta = -\frac{c_3^1}{R}$$

### 3.2.3 Tri-Coma: (n,m) = (3,3)

Il contributo della tri-coma è nullo. Infatti:

$$R_3^3(\rho) = \rho^3;$$

Ricordando che

$$\cos m\vartheta = \cos^m \vartheta - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} (\cos^{m-2} \vartheta \sin^2 \vartheta) + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (\cos^{m-4} \vartheta \sin^4 \vartheta) - \dots$$

$$\text{e che } \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \vartheta d\vartheta = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 2\pi,$$

$$\text{dove } (2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)\dots 1 \text{ e } (2n)!! = (2n)(2n-2)\dots 2$$

si ha che

$$W_3^3(\rho, \vartheta) = c_3^3 \rho^3 \cos 3\vartheta = c_3^3 \rho^3 (\cos^3 \vartheta - 3\cos \vartheta \sin^2 \vartheta) = c_3^3 \rho^3 (4\cos^3 \vartheta - 3\cos \vartheta)$$

e

$$\xi_0 = -\frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} W(1, \vartheta) d(\sin \vartheta) = -\frac{c_3^3}{\pi R} \int_0^{2\pi} (4\cos^4 \vartheta - 3\cos^2 \vartheta) d\vartheta = -\frac{c_3^3}{R} \left(4\frac{3}{4} - 3\right) = 0$$



#### 4. Appendice: proprietà della delta di Dirac

Nei calcoli sono state usate le note proprietà e rappresentazioni della delta di Dirac e delle sue derivate, :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x'-x) dx' = f(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta'(x'-x) dx' = -f'(x)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad \text{per } a > 0$$

$$\delta'(ax) = \frac{1}{a^2} \delta'(x) \quad \text{per } a > 0$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \Rightarrow \delta'(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k e^{ikx} dk$$

##### 4.1 Questioni ancora aperte

Su questo ultimo punto, che è fondamentale per ottenere il risultato finale, non ho trovato conforto diretto in letteratura. Essa in sostanza afferma che, sotto opportune ipotesi, valga la relazione

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int f(x, k) dk \right\} = \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(x, k) \right\} dk$$

Esiste un teorema sugli integrali che fornisce la dimostrazione nel caso  $f$  è una funzione (e non una distribuzione) e in cui l'intervallo di integrazione su  $k$  sia un insieme compatto misurabile  $K \subset \mathfrak{R}$  sottoinsieme proprio dei reali, sempreché  $f$  ammetta derivata parziale. Ma nel caso di  $K \equiv \mathfrak{R}$ ?

Un altro punto dubbio è il fatto che le rappresentazioni in onde piane usate per la delta di Dirac e la sua derivata non sono valide per tutte le classi di funzioni, ma solamente per quelle che tendono a zero con sufficiente rapidità all'infinito. Questo è un requisito per l'integrabilità.